11.06.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

9. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad F(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x).$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale $\int_\gamma F\cdot\vec{dx}$, wobei γ jeweils eine Parametrisierung des Randes der folgenden Gebiete in $\mathbb{R}^2$ ist:

1. Dreieck mit den Eckpunkten $A=(0,0)$, $B=(x_1,y_1)$ und $C=(x_2,y_2)$;
2. Ellipse $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1\}$ mit $a,b>0$;
3. $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon a<x<b,\ 0<y<f(x)\}$, wobei $f\in C^1([a,b])$ mit $f\geq 0$.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$F:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{R}^n,\quad F(x)=f(|x|)x$$

eine Stammfunktion.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $u\in C^2(\Omega)$ harmonisch, also

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Zeigen Sie, dass es eine harmonische Funktion $v\in C^2(\Omega)$ gibt mit

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad\text{und}\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Aufgabe 4

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und $F\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Für alle $1\leq i,j\leq n$ und $x\in\Omega$ gelte

$$\partial_j F_i(x)=\partial_i F_j(x).$$

Zeigen Sie, oder widerlegen Sie mit einem Beispiel, dass F auf den folgenden Gebieten Ω eine Stammfunktion besitzt:

1. $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$;
2. $\Omega=\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,x_3)\colon x_3\in\mathbb{R}\}$;
3. $\Omega=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ für $n\geq 3$.

Abgabe: Freitag, 19.06.2015, 11:30 Uhr.