22.09.2014
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Klausur Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Aufgabe 1 (differenzierbare Mannigfaltigkeiten (6+5))

Welche der folgenden Mengen sind differenzierbare Untermannigfaltigkeiten?

$$M_1 := SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) = 1\}, \quad M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^5\}$$

Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (Zurückholen von Differentialformen (6+6))

Betrachten Sie die Immersion $\gamma : \mathbb{R}\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(h,\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), h)$. Berechnen Sie den Pullback der Differentialformen $\omega_1 = zdx$, $\omega_2 = xdy + ydx$, $\omega_3 = xdy - ydx$, $\omega_4 = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ und deren äußere Ableitungen.

Aufgabe 3 (Die Flächenform (8))

Betrachten Sie die Differentialform

$$\omega = dx^2 \wedge dx^3 - dx^1 \wedge dx^3 + dx^1 \wedge dx^2$$

auf $\mathbb{R}^3$. Es sei $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine Immersion. Berechnen Sie

$$\gamma^*\omega$$

Aufgabe 4 (Integration von Differentialformen (3+3+3))

Betrachten Sie die Differentialform

$$\omega := \frac{x^1 dx^2 \wedge dx^3 - x^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 dx^1 \wedge dx^2}{\|x\|^3}$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

1. Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.
2. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$. Verwenden Sie dabei eine Orientierung von $\mathbb{S}^2$ Ihrer Wahl.
3. Es sei $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes offenes Gebiet mit C^1-Rand. Berechnen Sie $\left| \int_{\partial\Omega} \omega \right|$.

Außer Stift und Papier sind keine weiteren Hilfmittel erlaubt.

Viel Erfolg!