14.04.2014
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Dr. Simon Blatt
Katharina Illner

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Probleme mit Kurven)

Wir betrachten Sie die Kurven

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

und

$$\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Welche der beiden Mengen $Bild(\gamma_i) = \{\gamma_i(t) : t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$, ist eine eindimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 2 (Rotationsflächen)

Es sei $M = f^{-1}(0)$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ wobei $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion mit 0 als regulären Wert ist ($r \geq 1$). Zeigen Sie, dass die Rotationsfläche

$$R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x, y) \neq (0, 0),\ f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0\right\}$$

eine C^r-Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3 (Der Torus)

Zeigen Sie, dass der Torus

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(1 + r\sin(t)) \\ \sin(\varphi)(1 + r\sin(t)) \\ r\cos(t) \end{pmatrix} : \varphi, t \in \mathbb{R} \right\}$$

für festes $0 < r < 1/2$ eine C^∞-Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4 (Operationen mit Untermannigfaltigkeiten)

1. Es seien $M, N \subset \mathbb{R}^m$ C^r-Untermannigfaltigkeiten. Sind dann auch $M \cap N$, $M \cup N$ C^r-Untermannigfaltigkeiten?
2. Seien nun $M \subset \mathbb{R}^m$ und $N \subset \mathbb{R}^n$ C^r-Untermannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass $M \times N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ eine C^r-Untermannigfaltigkeit ist.

Abgabe: In der Übung am Dienstag, 22. 04. 2014.