Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I
Prof. Dr. M. von Renteln
Dr. C. Kaiser

29. September 2005

Lösungen zur Klausur Funktionentheorie I

SS 2005

Aufgabe 1

☐ von **6** Punkten

Sei S die Möbiustransformation, die durch $S(z) = \dfrac{i}{i-z}$ gegeben ist.

a) Bestimmen Sie das Bild der Einheitskreislinie unter S.

b) Sei $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\}$. Bestimmen Sie $S^{-1}(H)$.

Begründen Sie Ihre Antwort jeweils sorgfältig.

Lösung

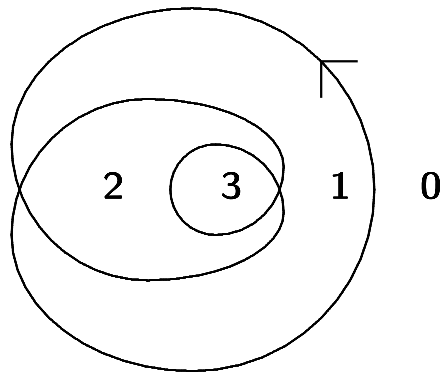
a) Wegen der Kreistreue der Möbiustransformation wird die Einheitskreislinie auf einen verallgemeinerten Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$ abgebildet. Da $S(i) = \infty$, ist das Bild eine Gerade. Da $S(-i) = \frac{1}{2}$ und $S(1) = \frac{i}{i-1} = \frac{i(i+1)}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ handelt es sich um die Gerade durch die Punkte $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, also um die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \cup \{\infty\}$.

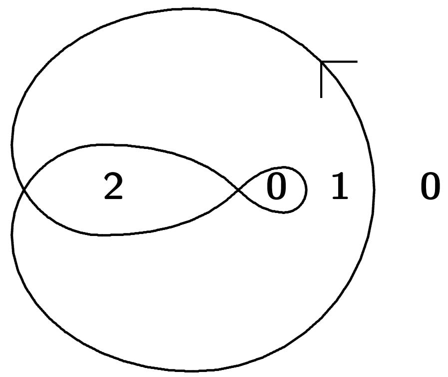
b) Nach (a) ist das Urbild von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\} \cup \{\infty\}$ die Einheitskreislinie. Nun ist $S^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ wiederum eine Möbiustransformation und daher stetig und bijektiv. $S^{-1}(H)$ ist also das Innere oder das Äußere des Einheitskreises. Da $S(0) = 1$, also $S^{-1}(1) = 0$, ist $S^{-1}(H)$ die offene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (Man kann auch mit der Orientierungstreue der Möbiustransformation argumentieren.)

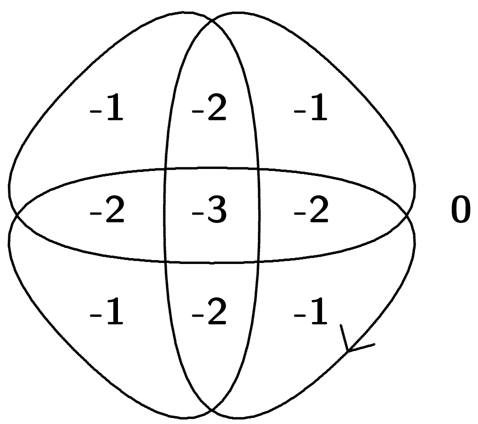
Aufgabe 2

☐ von **6** Punkten

Geben Sie jeweils für den skizzierten Weg Γ den Index $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ an. (Eine Begründung ist nicht verlangt.)







Aufgabe 3

☐ von **9** Punkten

Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{(e^{it})}dt,$ b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z^2)}{(\sin z)^2}dz,$ c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \sin(e^{1/z})dz.$

Lösung

a) Der geschlossene Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) = e^{it}$. Dann gilt nach der Definition des Wegintegrals und dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_0^{2\pi} e^{(e^{it})}dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{(e^{it})}}{ie^{it}} ie^{it}dt = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz = \frac{2\pi i}{i}e^0 = 2\pi.$$

b) Sei $f(z) = \sin(z^2)$ und $g(z) = (\sin z)^2$. Dann sind f und g ganze Funktionen. Die Funktion g hat genau die Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $\frac{f}{g}$ im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \pi\} \setminus \{0\}$ holomorph. Sowohl f als auch g haben im Nullpunkt 2-fache Nullstellen, denn $f'(0) = g'(0) = 0$ und $f''(0), g''(0) \neq 0$. Nach Aufgabe 5 dieser Klausur hat $\frac{f}{g}$ in 0 eine hebbare Singulatität. Daher ist das gesuchte Integral nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich 0.

c) *1. Lösungsmöglichkeit:* Es gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=1} \sin(e^{1/z})dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \sin(e^{1/z}).$$

Zur Berechnung des Residuums entwickeln wir $\sin(e^{1/z})$ in eine Laurentreihe um 0: Die Funktion $w \mapsto \sin(e^w)$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und daher um 0 in eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ entwickelbar, etwa $\sin(e^w) = \sum_{k=0}^\infty a_k w^k$. Dann gilt $\sin(e^{1/z}) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^{-k}$. Also ist $\operatorname{Res}_{z=0} \sin(e^{1/z}) = a_1$. Nach dem Satz von Taylor ist aber $a_1 = (\sin(e^w))'\Big|_{w=0} = \cos(1)$. Zusammen gilt also

$$\int_{|z|=1} \sin(e^{1/z})dz = 2\pi i \cos(1).$$

2. Lösungsmöglichkeit: Nach der Definition des Wegintegrals und Substitution $s = -t$ ist

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \sin(e^{1/z})dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(e^{e^{-is}})ie^{is}ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(e^{e^{it}})ie^{-it}dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(e^{e^{it}})}{e^{2it}} ie^{it}dt = \int_{|w|=1} \frac{\sin(e^w)}{w^2}dw.\end{aligned}$$

Nun gilt mit der Cauchyschen Integralsformel

$$\int_{|w|=1} \frac{\sin(e^w)}{w^2}dw = 2\pi i(\sin(e^w))'|_{w=0} = 2\pi i \cos(1).$$

Aufgabe 4

☐ von **6** Punkten

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Lösung

Sei $f(z) = \frac{1}{z^2-2z+2}$. Da die Nullstellen von $z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1$ bei $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$ liegen, ist f auf $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ holomorph und hat in z_1 bzw. z_2 jeweils einen Pol erster Ordnung.

Sei $R > 1$ und $\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma_R(t) = 1 + Re^{it}$. Dann folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{1-R}^{1+R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z).$$

Da $i + 1$ ein Pol erster Ordnung von f ist, gilt

$$\operatorname*{Res}_{z=i+1} f(z) = \lim_{z \to i+1} (z - i - 1) f(z) = \lim_{z \to i+1} \frac{1}{z - 1 + i} = \frac{1}{2i}.$$

Weiter ist

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(1 + Re^{it}) Rie^{it} dt = \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{(1 + Re^{it} - 1)^2 + 1} dt$$

und daher

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|R^2 e^{2it} + 1|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2 - 1} dt = \frac{R\pi}{R^2 - 1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Da f eine rationale Funktion ist, die keine reellen Polstellen hat, und da der Grad des Nennerpolynoms um 2 größer ist als der Grad des Zählerpolynoms, existiert das gesuchte Integral als uneigentliches Riemann-Integral und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{1-R}^{1+R} f(x)dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1+i} f(z) - \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \pi.$$

Aufgabe 5

$\square$ von **6** Punkten

Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit Nullstellen der Ordnung k in $z_0 \in G$. Zeigen Sie, dass dann $h = \frac{f}{g}$ in z_0 eine hebbare Singularität hat und dass gilt:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Lösung

1. Lösungsmöglichkeit: Nach Voraussetzung existieren holomorphe Funktionen $\tilde{f}, \tilde{g} : G \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$, so dass $f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z)$ und $g(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$ gilt für alle $z \in G$. Insbesondere ist $\tilde{g}$ stetig in G. Es existiert also eine Kreisumgebung U von z_0 mit $\tilde{g}(z) \neq 0$ für $z \in U$. Daher ist auch $g(z) \neq 0$ in U, also h holomorph in $U \setminus \{z_0\}$. Weiter gilt

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}, \qquad z \in U \setminus \{z_0\}$$

und $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ ist holomorph in U. Daher ist h nach z_0 durch $\frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)}$ holomorph fortsetzbar. Also ist z_0 eine hebbare Singularität von h.

Es gilt $f^{(k)}(z_0) = k!\tilde{f}(z_0)$ und $g^{(k)}(z_0) = k!\tilde{g}(z_0)$ nach der Leibniz-Regel. Daher ist

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

2. Lösungsmöglichkeit: Nach Voraussetzung ist

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{und} \qquad g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

in einer Kreisumgebung U von z_0, wobei $f^{(k)}(z_0)$ und $g^{(k)}(z_0)$ beide von Null verschieden sind. Insbesondere gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad \text{und} \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0.$$

Nach dem Identitätssatz kann man U so wählen, dass $g(z) \neq 0$ ist für $z \in U \setminus \{z_0\}$. Dann ist h holomorph in $U \setminus \{z_0\}$ und es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^k f(z)}{(z - z_0)^k g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}.$$

Also läßt h sich nach z_0 stetig fortsetzen und ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist daher z_0 eine hebbare Singularität von h.

Aufgabe 6

☐ von **6** Punkten

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville.

b) Es sei g eine ganze Funktion. Zeigen Sie: Ist g nicht konstant, dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_k) in $\mathbb{C}$, so dass $g(z_k)$ für $k \to \infty$ gegen a konvergiert.

Lösung

a) Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

b) Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$, so dass $|g(z) - a| \geq \epsilon$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist also $f : z \mapsto \frac{1}{g(z)-a}$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph, d.h. eine ganze Funktion. Weiter ist f beschränkt, da

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|g(z) - a|} \leq \frac{1}{\epsilon}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Der Satz von Liouville liefert nun, dass f konstant ist. Dann ist aber auch g konstant. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 7

☐ von **9** Punkten

Entscheiden Sie (ohne Begründung), welche der folgenden Aussagen richtig, welche falsch sind. Kreuzen Sie Ihre Antwort in der untenstehenden Tabelle an. Jede richtige Antwort wird mit +1 Punkt, jede falsche Antwort mit −1 Punkt bewertet. Für diese Aufgabe gibt es jedoch mindestens 0 Punkte.

a) Ist f in einem Gebiet holomorph, dann hat f dort eine Stammfunktion.

b) Ist f in einem Punkt von $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, dann ist f dort holomorph.

c) Ist f eine ganze Funktion, die auf der reellen Achse beschränkt ist, dann ist f konstant.

d) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z+3| = |z-3i|\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{C}$.

e) Es gibt eine Möbiustransformation, die keinen Fixpunkt hat.

f) Die Funktion $z \mapsto \overline{\sin \overline{z}}$ ist in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

g) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(z) = 1$ für $|z| = 1$ und $f(2) = 2$ gilt.

h) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ ist.

i) Es gibt eine ganze Funktion, für die $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aussage	richtig	falsch
a)		x
b)		x
c)		x
d)	x	
e)		x
f)	x	
g)		x
h)		x
i)	x	

Kurze Begründung (in der Aufgabe nicht verlangt):

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ ist auf dem Gebiet $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph, hat aber dort keine Stammfunktion.

b) $f(z) = |z|^2$ ist in 0 komplex differenzierbar, aber nicht holomorph.

c) $f(z) = \sin z$ ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt, aber nicht konstant.

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z+3| = |z-3i|\}$ ist die Menge aller Punkte, die von 3 und $3i$ denselben Abstand haben, also eine Gerade.

e) Satz der Vorlesung: Jede Möbiustransformation hat mindestens einen Fixpunkt.

f) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\overline{\sin \overline{z}} - \overline{\sin \overline{z_0}}}{z - z_0} = \overline{\left(\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\sin \overline{z} - \sin \overline{z_0}}{\overline{z} - \overline{z_0}}\right)} = \overline{\cos(\overline{z_0})}$

g) Da die Menge $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ Häufungspunkte besitzt und f dort konstant 1 ist, muss f nach dem Identitätssatz schon auf ganz $\mathbb{C}$ konstant 1 sein.

h) Widerspruch zur Gebietstreue: $\mathbb{R}$ ist kein Gebiet in $\mathbb{C}$, da nicht offen in $\mathbb{C}$.

i) Wähle z.B. $f(z) = 0$.