28.10.2013
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Mittlere Krümmung)

Zeigen Sie, dass für ein Flächenstücke $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset R^2$ offen, gilt

$$H_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_u(X(\varphi), X(\varphi)), \quad \forall u \in \Omega$$

wobei $X(\varphi) = \sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2$ und e_1, e_2 eine orthonormal Basis von $T_u f$ (Hinweis: Verwenden Sie die Invarianz der Spur unter Basiswechsel).

Aufgabe 2 (Pseudosphäre)

Betrachten Sie die zur Profilkurve $t \to (r(t), h(t))$ wobei

$$r(t) = e^{-t}, \quad h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - e^{-2s}} ds$$

$t \in (0, \infty)$ gehörende Rotationsfläche

$$f(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)r(t) \\ \sin(\varphi)r(t) \\ h(t) \end{pmatrix},$$

$(t, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$.

1. Zeigen Sie, dass $K_f \equiv -1$.
2. Zeigen Sie, dass an der "Spitze" die Krümmung entlang der Breitenkreise unendlich groß wird.

Aufgabe 3 (Regelfläche)

Mit Hilfe einer Kurve $\gamma \in C^\infty((a, b), \mathbb{R}^2)$, $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in (a, b)$ und eines Vektorfeldes $X \in C^\infty((a, b), \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ das punktweise linear unabhängig von γ' ist definieren wir die *Regelfläche* oder *geradlinige* Fläche

$$f(x, y) = \gamma(x) + yX(x).$$

Falls $X' \neq 0$, kann man nach einer geeigneten Umparametrisierung annehmen, dass $|X| = |X'| = 1$ und $\langle \gamma', X' \rangle = 0$.

1. Berechnen Sie die erste und zweite Fumdamentalform einer Regelflächen (Nicht ganz einfach!).
2. Bestimmen Sie die mittlere Krümmung und Gaußkrümmung der sogenannten *Wendelfläche*
$$f(x, y) = (y \sin(x), y \cos(x), x),$$
$x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (Willmoreenergie)

Betrachten Sie für $a > b > 0$ die *Rotationstori*

$$f(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(a + b\cos(t)) \\ \sin(\varphi)(a + b\cos(t)) \\ b\sin(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

für $\varphi, t \in [0, 2\pi]$,

1. Berechnen Sie den sie die *totale mittlere Krümmung* oder *Willmoreenergie*

$$\mathcal{W}(f) = \int_{[0,2\pi]^2} |H_f|^2 \sqrt{\det(g_{ij})} d\varphi dt.$$

2. Welche $a > b > 0$ liefern den Rotationstorus mit der kleinstmöglichen Willmoreenergie?