12.11.2013
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Scherksche Minimalfläche)

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion

$$u : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \ln(\cos(x)) - \ln(\cos(y))$$

eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 2 (Rotationsflächen)

1. Bestimmen Sie alle Rotationsflächen mit $H \equiv 0$!
2. Bestimmen Sie alle Rotationsflächen mit $K \equiv const$!

Aufgabe 3 (Maximumsprinzip für elliptische Gleichungen)

Für Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, die der *Elliptizitätsbedingung*

$$\inf_{x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij}(x) v_i v_j}{|v|^2} \right) > 0$$

genügen, betrachten wir die elliptische partielle Differentialgleichung

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_{ij} u + b_i \partial_i u) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass für jedes $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ mit

   $$Lu > 0 \quad \text{in } \Omega$$

   gilt

   $$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

   (Hinweis: Beweis durch Widerspruch!)
2. Zeigen Sie, dass dieselbe Aussage auch unter der schwächeren Bedingung $Lu \geq 0$ gilt. Schließen Sie dann, dass aus

   $$Lu = 0 \quad \text{in } \Omega$$

   folgt

   $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

   (Hinweis: Wende Sie den ersten Teil auf $\tilde{u} = u + \varepsilon e^{\gamma x_1}$ für γ groß an und schicke ε gegen 0.)

Aufgabe 4 (Poissongleichung)

Es sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$, $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge. Zeigen Sie, dass es höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ der Poissongleichung

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gibt.