22.11.2013
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 3

Übung 1 (Harmonische und Holomorphe Funktionen)

1. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass dann sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von f eine harmonische Funktion ist (Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen).
2. Sei nun umgekehrt $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion und Ω einfach zusammenhängend. Zeigen Sie, dass es dazu eine harmonische Funktion $v : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $f = u + iv$ holomorph ist.

Übung 2 (Minimalfächengleichung)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene und beschränkte Menge. Man nennt eine lineare partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu) = f,$$

$a_{ij}, b_i, f \in C^0(\Omega)$ *gleichmäßig elliptisch*, falls es eine Konstante $\Lambda > 0$ gibt mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)v_i v_j > \Lambda|v|^2 \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega, v \in \mathbb{R}^n.$$

1. Es sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ eine Lösung der Minimalflächengleichung. Löst u auch eine lineare gleichmäßig elliptisch partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung? (Hinweis: Da die Funktion u fest gewählt, dürfen die Koeffizienten von Du abhängen!)
2. Zeigen Sie, dass für gegebenes $\varphi \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ besitzt. (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Differenz zweier Lösungen eine lineare elliptische partielle Differentialgleichung erfüllt und wenden Sie Übung 3 von Übungsblatt 2 an.)

Übung 3 (Rotationsminimalflächen höherer Dimension)

Zu einer Funktion $u \in C^2((a, b), (0, \infty))$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ist das Funktional

$$\mathcal{A}_n(u) := n\omega_n \int_a^b u^{n-1}\sqrt{1 + |u'|^2}dx$$

das Flächenfunktional der n-dimensionalen Rotationsfläche $f : (a,b) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x,\omega) := (u(x)\omega, x)$ ($n\omega_n$ = Fläche von $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$). Wir nennen f Minimalfläche, wenn

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}_n(u+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1((a,b),\mathbb{R}).$$

1. Es sei $F(x,p) := n\omega_n x^{n-1}\sqrt{1+p^2}$. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Minimalfläche ist, wenn
$$\partial_x F(u,u') - \frac{d}{dx}\left(\partial_p F(u,u')\right) = 0.$$
(Hinweis: Fundamentallemma der Variationsrechnung!)
2. Es sei nun f eine Minimalfläche. Zeigen Sie, dass
$$-n\omega_n \frac{u^{n-1}}{\sqrt{1+|u'|^2}} = u'\partial_p F(u,u') - F(u,u')$$
konstant ist.
3. Schließen Sie unter der Bedingung $u' > 0$ auf (a,b), dass
$$cG\left(\frac{u(x)}{c}\right) = x - x_0$$
für passend gewählte $c > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ wobei
$$G(y) := \int_1^y \frac{1}{\sqrt{u^{2(n-1)}-1}}du$$
für $y \geq 1$. Was ergibt sich für $n = 2$? Was erhalten Sie, wenn $u' < 0$ auf (a,b)?
4. Zeigen Sie, dass G strikt monoton und beschränkt ist, falls $n > 2$, aber unbeschränkt für $n = 2$. Skizzieren Sie u!
5. Können Sie damit alle n-dimensionalen Rotationsflächen charakterisieren, die Minimalflächen sind?