24.12.2013
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (Minimalflächen und konforme Parametrisierung)

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ein konform parametrisiertes Flächenstück. Zeigen Sie, dass die Koordinatenfunktionen von f genau dann harmonisch sind, wenn f eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 2 (Ein haariges Problem)

Wir wählen eine Funktion $\varphi \in C^\infty(B_1(0), [0,\infty))$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq \frac{1}{2}$ und $\varphi(0) = 1$ und setzen für $l \in]0, \infty[$

$$X_l(x) := \begin{cases} (x, l^{-1/2}\varphi(x/l)) & \text{falls } x \in B_1(0) \\ (x, 0) & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für das Flächenfunktional gilt $\mathcal{A}(X_l) \to \pi$ für $l \to 0$ aber $X_l(0) \to \infty$.

Aufgabe 3 (Das Dirichletsche Prinzip)

1. Es sei $v \in C^2(B_1(0)) \cap C^0(\overline{B_1(0)})$ eine Funktion mit endlicher Dirichletenergie, d.h. $\int_{B_1(0)} |\nabla u|^2 dx < \infty$. Zeigen Sie, dass die Lösung der Laplacegleichung

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = v & \text{auf } B_1(0) \end{cases}$$

   endliche Dirichletenergie hat. (Hinweis: Verwenden Sie (ohne Beweis), dass harmonische Funktionen $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B_r(0)})$, $r > 0$, die auf dem Rand mit einer Funktion in $C^2(\overline{B_r(0)})$ übereinstimmen, in $C^1(\overline{B_r(0)})$ liegen und damit endlich Dirichletenergie haben!)
2. Zeigen Sie, dass das Dirichletsche Prinzip aus der Vorlesung auch gilt, wenn wir nicht explizit fordern, dass die Dirichletenergie der harmonischen Funktion u endlich ist.