15.01.2014
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (Büroklammer und Haarklammer Lösung)

Weisen Sie nach, dass die Graphen γ_t der Funktionen $u_t(x) = \operatorname{arcosh}(cos(x)e^{-t})$ für $t \in (-\infty, 0)$, $x \in (-\arccos(e^t), \arccos(e^t)]$ und $v_t(x) = \operatorname{arsinh}(cos(x)e^{-t})$ für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ die Gleichung

$$(\partial_t \gamma)^\perp = \vec{\kappa}_{\gamma_t}$$

erfüllen.

Aufgabe 2 (Evolution der Länge unter dem Curve Shortening Flow)

Es sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ eine geschlossenen eingebettete Kurve, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird, $\nu \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{S}^1)$ die zugehörige Gaußabbildung.

1. Zeigen Sie, dass ν injektiv ist (Hinweis: Schieben Sie eine Gerade zuerst so weit nach draußen, dass Sie die Kurve γ nicht schneidet. Anschließend, schieben Sie die Gerade wieder in Richtung der Kurve, bis Sie die Kurve berührt!)
2. Schließen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes aus der Integralrechnung, dass
$$\int_{\mathbb{S}^1} |\kappa| ds \geq 2\pi$$
und damit
$$\int_{\mathbb{S}^1} |\kappa|^2 ds \geq \frac{(2\pi)^2}{L}$$
wobei $L = \int_0^1 |\gamma'(x)| dx$ die Länge der Kurve.
3. Es sei nun $\gamma \in C^\infty((\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times [0,T), \mathbb{R}^2)$ eine Lösung des Curve Shortening Flows von eingebetteten Kurven. Zeigen Sie, dass
$$\frac{d}{dt}(L^2) \leq -8\pi^2.$$

Aufgabe 3 (Parabolisches Maximumsprinzip)

1. Es seien $b_i \in C^1(\Omega \times [0,T))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie (ohne Verwendungs von Hamiltons Trick), dass für Lösungen $u \in C^2(\Omega \times (0,T)) \cap C^0(\overline{\Omega} \times [0,T))$ der Gleichung
$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \partial_{x_i} u(x,t) < 0 & \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \end{cases}$$
gilt
$$\sup_{x \in \Omega} u(x,t) \leq \sup_{x \in \Omega} u(x,0) \quad \forall t \in [0,T)$$
(Hinweis: Führen Sie die Annahme, dass $\sup_{x\in\Omega} u(x,t) \geq \sup_{x\in\Omega} u(x,0) + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$, $t \in (0,T)$ zu einem Widerspruch! Betrachten Sie dazu die erste Zeit, zu der dies gilt!)

2. Zeigen Sie, dass die Aussage auch gilt, wenn wir nur

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_{x_i} u(x,t) \leq 0$$

anstelle der strikten Ungleichung fordern. (Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t\psi(x)$ für eine geeignete Funktion ψ.