23.01.2014
Geometrische Analysis
Dr. Simon Blatt

Karlsruhe Institute of Technology

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Ein Monotoniekriterium)

Es sei $u : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, lokal Lipschitz-stetig. Aufgrund des Satzes von Rademacher ist u fast überall differenzierbar. Es gelte ferner $u'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, für die diese Ableitung existiert. Zeigen Sie, dass u monoton fallend ist.

Aufgabe 2 (Charakterisierung des Kreises)

1. Es seien $\gamma, \tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma'(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ und $\kappa_\gamma \equiv \kappa_{\tilde{\gamma}}$. Zeigen Sie, dass dann $\gamma' \equiv \tilde{\gamma}'$ und damit $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$
2. Schließen Sie daraus, dass eine Kurve $\gamma \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit $|\kappa_\gamma| = \frac{1}{R} = const > 0$ einen Kreis vom Radius R parametrisiert.

Aufgabe 3 (Längenvergleich für Kurven)

Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2)$ eine Kurve der Länge 2π. Zeigen Sie, dass es ein $a > 0$ gibt, mit

$$d(p,q) > f_a(l(p,q)) \quad \forall (p,q) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \text{ mit } p \neq q$$

wobei

$$f_a(x) = \frac{2}{a} \arctan(a \sin(x/2)).$$