Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12
25.10.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Gegeben seien die Mengen $M = \{2, 4, 7\}$ und $N = \{2, 4, 8, 9\}$. Geben Sie, falls möglich, eine injektive, eine nicht injektive, eine surjektive und eine nicht surjektive Abbildung von M nach N bzw. von N nach M an. Existieren auch bijektive Abbildungen?

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass π genau dann injektiv ist, wenn π surjektiv ist.

Aufgabe 2

a) Für $k \in \{1, 2, 3\}$ seien die Funktionen $f_k\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ definiert durch

$$f_1(x) := x\,, \qquad f_2(x) := 1 + \frac{x}{1-x}\,, \qquad f_3(x) := 1 - \frac{1}{x}\,.$$

Überprüfen Sie jede dieser Funktionen auf Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

b) Berechnen Sie $f_j \circ f_k$ für alle $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 3

Es seien X, Y und Z Mengen sowie $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Weiter sei $h := g \circ f$ die Komposition von f und g. Begründen Sie die folgenden Aussagen:

a) **i)** Ist h injektiv, dann ist f injektiv.
ii) Ist h surjektiv, dann ist g surjektiv.

b) **i)** Sind f und g bijektiv, so ist auch h bijektiv.
ii) Ist h surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit

a) $|x - 4| = |x + 1|$; **b)** $|2x| > |5 - 2x|$; **c)** $\big|2 - |2 - x|\big| \leqslant 1$;

d) $|x + 1| + |x - 1| > 2$; **e)** $\dfrac{3x}{1 + |x|} < 4x^2$; **f)** $2x + \dfrac{1}{1 - x} \geqslant 1$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}\,.$$