Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
29.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 2

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.
- **ii)** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.
- **iii)** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- **iv)** $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2011, aber nicht monoton.
- **v)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Bestimmen Sie jeweils alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **i)** $a_n := \big(1+(-1)^n\big)^n$
- **ii)** $a_n := \begin{cases} 1+1/2^n\,, & \text{falls } n=3k \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \\ 2\,, & \text{falls } n=3k-1 \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \\ 2+(n+1)/n\,, & \text{falls } n=3k-2 \text{ für ein } k\in\mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 3

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen a konvergiert, wenn die beiden Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$ gilt.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie jeweils die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n := \begin{cases} (1-\frac{1}{n})^{n^2}\,, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n^{2011}+n} - (1-\frac{1}{n^2})^n\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

b) $a_n := \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \qquad (a>0 \text{ fest})$

Aufgabe 5

Es seien $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst den Fall $a = 0$. Fixieren Sie $\varepsilon > 0$ und betrachten Sie für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_m) + \frac{1}{n}(a_{m+1} + \ldots + a_n)$.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $s_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{(-2)^{3k-1}}{3^{2k+1}}$

b) $s_N := \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{(k+1)!}$

c) $s_N := \sum_{m=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}$

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**