Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12
06.12.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n\,.$$

Begründen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

b) Seien $a \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \limsup_{n\to\infty} |a_n - a| = 0\,.$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n!}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+(-1)^n}$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$

Hinweis: Argumentieren Sie mit dem Leibniz-, Majoranten- oder Minorantenkriterium.

Aufgabe 3

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,.$$

a) Zeigen Sie: Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Begründen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergent ist.

c) Warum ist das Leibnizkriterium hier nicht anwendbar?

Aufgabe 4

a) Es sei $p \in \mathbb{N}$ fest sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ konvergiert, und bestimmen Sie den Wert der Reihe.

Hinweis: Den Fall $p = 1$ haben Sie bereits auf dem 4. Übungsblatt untersucht.

b) Zeigen Sie, dass folgende Reihen konvergieren, und bestimmen Sie ihre Reihenwerte.

i) $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$ für $p \in \mathbb{N}$ fest **ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Hinweis: Es ist $\frac{1}{n^2-p^2} = \frac{1}{2p}(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p})$ für $n > p$ und $\frac{y}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1-y^2}$ für $|y| \neq 1$.

Aufgabe 5

Gegeben seien $q \in [0, 1)$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$.

a) Es gelte

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q \cdot |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Zeigen Sie, dass dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist.

Hinweis: Rechnen Sie nach, dass $|a_{n+1} - a_n| \leqslant q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und folgern Sie damit, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

b) Nun erfülle die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ statt $(*)$ die Bedingung

$$|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf Konvergenz.

Hinweis:
Die **Klausur zu HM I** findet am Montag, den 12.03.2012, 08:00-10:00 Uhr statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich, welche über das KIT-Studierendenportal vorgenommen werden kann. **Anmeldeschluss ist Freitag, der 10.02.2012.**