Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $a_n := n^3 e^{-n}$. Wir wenden das Wurzelkriterium an: Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^3 e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}$$

gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1} < 1$, d. h. das Wurzelkriterium liefert die Konvergenz der Reihe.

b) Wegen $\sqrt[n]{|(\sqrt[n]{n}-1)^n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent und somit auch konvergent.

c) Setze $a_n := \frac{n}{3^n}(1+(-1)^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $|a_n| \leqslant \frac{2n}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1\,.$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt also mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

d) Ist $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+2/n)(2+1/n)}.$$

Also ist $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(1+0)^2}{(2+0)(2+0)} = \frac{1}{4} < 1$. Das Quotientenkriterium liefert, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, also insbesondere konvergiert.

e) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n := \frac{(2n)!\,(3n)!}{n!\,(4n)!}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(2n+2)!\,(3n+3)!}{(n+1)!\,(4n+4)!}\cdot\frac{n!\,(4n)!}{(2n)!\,(3n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}\\ &= \frac{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3}{1\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4} = \frac{27}{64} < 1\,,\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und damit auch konvergent.

f) Wegen $i^4 = (-1)^2 = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$i^{4m-3} = i, \qquad i^{4m-2} = -1, \qquad i^{4m-1} = -i, \qquad i^{4m} = 1.$$

Folglich erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4N}\frac{i^n}{n} &= \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{i^{4m-3}}{4m-3}+\frac{i^{4m-2}}{4m-2}+\frac{i^{4m-1}}{4m-1}+\frac{i^{4m}}{4m}\right)\\ &= i\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{4m-3}-\frac{1}{4m-1}\right)+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{4m}-\frac{1}{4m-2}\right)\\ &= i\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+-\ldots+\tfrac{1}{4N-3}-\tfrac{1}{4N-1}\right)+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{6}+-\ldots+\tfrac{1}{4N}-\tfrac{1}{4N-2}\right)\\ &= i\sum_{k=1}^{2N}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}+\sum_{k=1}^{2N}(-1)^k\frac{1}{2k}.\end{aligned}$$

Da $(\frac{1}{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\frac{1}{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Nullfolgen sind, konvergieren diese Summen für $N\to\infty$ nach dem Leibnizkriterium. Damit wissen wir: Wenn wir mit s_N die N-te Partialsumme der zu untersuchenden Reihe bezeichnen, dann konvergiert s_{4N} für $N\to\infty$.

Für $m\in\{1,2,3\}$ gilt wegen $|i^n/n|=1/n$

$$s_{4N+m}=s_{4N}+\sum_{n=4N+1}^{4N+m}\frac{i^n}{n}\xrightarrow{N\to\infty}\lim_{N\to\infty}s_{4N}.$$

Folglich konvergiert s_N für $N\to\infty$, d.h. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ konvergiert. Sie ist aber nicht absolut konvergent, weil die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{i^n}{n}|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert.

Aufgabe 2

Setze $b_n:=\frac{(1+\frac{1}{2}(-1)^n)^n}{n^2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Zuerst zum Quotientenkriterium: Für ungerades $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{(1+\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(1-\frac{1}{2})^n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(\frac{3}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{2})^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{3^{n+1}}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

Für gerades $n\in\mathbb{N}$ dagegen ergibt sich

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{(1-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{(1+\frac{1}{2})^n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(\frac{3}{2})^n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^n}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Es gilt also $\limsup_{n\to\infty}|b_{n+1}/b_n|=\infty>1$ und $\liminf_{n\to\infty}|b_{n+1}/b_n|=0<1$. Das Quotientenkriterium liefert somit keine Entscheidung.

Das Wurzelkriterium kann dennoch eine Entscheidung bringen, und so ist es in diesem Falle tatsächlich. Für gerades $n\in\mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sqrt[n]{|b_n|}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{n^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2},$$

d. h. es gilt $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\geqslant\frac{3}{2}>1$, und dies impliziert die Divergenz der Reihe.

Aufgabe 3

a) Die Aussage ist falsch. Sei etwa $a_n:=\frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt $a_n\neq 0$ und $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\frac{n}{n+1}<1$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Allerdings ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergent.

b) Die Aussage ist falsch. Seien etwa $a_n:=\frac{1}{n}$ und $b_n:=\frac{1}{n^2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt $a_n-b_n\to 0$ $(n\to\infty)$ und $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergiert. Allerdings ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergent.

c) Die Aussage ist falsch. Betrachte etwa $a_n:=\frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, jedoch divergiert $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

Aufgabe 4

Die Reihe

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, weil $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).\quad(*)$$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 0.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, ist $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine divergente Minorante für die Reihe in $(*)$.

Aufgabe 5

Die beiden geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ sind wegen $|\frac{1}{3}| < 1$ bzw. $|\frac{2}{3}| < 1$ absolut konvergent. Ihre Reihenwerte sind gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3. \tag{$*$}$$

a) Wir bezeichnen mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ das Cauchyprodukt dieser beiden Reihen. Nach Definition gilt

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1^{n-k}2^k}{3^{n-k}3^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{3^n} = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}2^k.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhalten wir schließlich

$$c_n = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}2^k = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \frac{2\cdot 2^n - 1}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Da die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ absolut konvergent sind, ist auch ihr Cauchyprodukt absolut konvergent, und es ergibt sich für die Reihenwerte

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \overset{(*)}{=} 2\cdot 3 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

b) Direkt aus den oben angegebenen Reihenwerten folgt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Aufgabe 6

Sei $q \in (0,1)$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist absolut konvergent. Wie bereits in der Vorlesung gesehen, gilt

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n\sum_{k=0}^{n}1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Diese Reihe ist als Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Indem man das Cauchyprodukt dieser Reihe mit $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bildet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-q}\right)^2\cdot\frac{1}{1-q} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k q^{n-k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(q^n\sum_{k=0}^{n}(k+1)\right) \overset{\text{Aufg.4a)i), Üb.4}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)q^n.\end{aligned}$$

Für den Wert der gegebenen Reihe erhalten wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)q^n = 2\left(\frac{1}{1-q}\right)^2\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Aufgabe 7

a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir ziehen das Wurzelkriterium zu Rate:

$$\sqrt[n]{|z^n/n^2|} = \frac{|z|}{(\sqrt[n]{n}\,)^2} \xrightarrow{n\to\infty} |z|.$$

Damit wissen wir: Für $|z| < 1$ liegt Konvergenz vor, für $|z| > 1$ jedoch Divergenz. Untersuchen wir noch den Fall $|z| = 1$: Dann gilt

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt in diesem Fall die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ mit dem Majorantenkriterium.

Insgesamt ergibt sich: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert genau dann, wenn $|z| \leqslant 1$ ist.

b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Diesmal verwenden wir das Quotientenkriterium: Für $a_n := n!\, z^n$ gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,|z|^{n+1}}{n!\,|z|^n} = (n+1)|z| \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \infty & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Also konvergiert die Reihe nur für $z = 0$.