Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

WS 2011/12

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das Additionstheorem $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ liefert für jedes $x\in\mathbb{R}$

$$\sin(2x)=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x\,.$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x)=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x\,,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ergibt sich für jedes $x\in\mathbb{R}$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\begin{cases}(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x\,,\\ \cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2\cos^2 x-1\,.\end{cases}$$

Aufgabe 2

a) Für $a_n:=(2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{2n+1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n^2}{2n+3}=\frac{2+1/n}{(1-1/n)^2}\cdot\frac{1}{2+3/n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{2}=1\,.$$

Die Potenzreihe hat daher den Konvergenzradius 1. Also liegt für $|x-5|<1$, d.h. $4<x<6$, Konvergenz und für $|x-5|>1$, d.h. $x<4$ oder $6<x$, Divergenz der Potenzreihe vor. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x=4$ und $x=6$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(-1)^n\qquad\text{und}\qquad\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}\,.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe folgt aus dem Leibnizkriterium, weil $a_n=\frac{2+1/n}{(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}})^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$ und (a_n) monoton fallend ist, denn

$$a_n=\frac{2n+1}{(n-1)^2}=\frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2}=\frac{2}{n-1}+\frac{3}{(n-1)^2}\geqslant\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}=\frac{2n+3}{n^2}=a_{n+1}\,.$$

Die zweite Reihe hingegen ist divergent. Dies folgt aus dem Minorantenkriterium wegen $a_n\geqslant 2n/n^2=2/n$ und der Divergenz der harmonischen Reihe.

Insgesamt: Die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1}{(n-1)^2}(x-5)^n$ konvergiert genau für $x\in[4,6)$.

b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|}=1/n\xrightarrow{n\to\infty}0$ hat diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞, d.h. sie konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$.

c) Die Potenzreihe hat die Form $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ mit $a_{2n} = e^{n(1+(-1)^n)}$ und $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist

$$\sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \sqrt[2n]{\left|e^{n(1+(-1)^n)}\right|} = \begin{cases} e^{2n/2n} = e\,, & n \text{ gerade}\,, \\ e^{0/2n} = 1\,, & n \text{ ungerade}\,, \end{cases}$$

und wegen $\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = e$, d. h. die Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-1}. Für $x = \pm e^{-1}$ ergibt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n}$.

Diese Reihe ist divergent, da für gerades n gilt: $e^{n(1+(-1)^n)} e^{-2n} = e^{2n} e^{-2n} = 1 \nrightarrow 0$ $(n \to \infty)$. Die Potenzreihe konvergiert daher nur für $x \in (-e^{-1}, e^{-1})$.

Bemerkung: Man kann auch $y := x^2$ setzen und $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n(1+(-1)^n)} y^n$ untersuchen. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius e^{-2}, d.h. sie ist konvergent für $|y| < e^{-2}$ und divergent für $|y| > e^{-2}$. Hieraus folgt dann Konvergenz der ursprünglichen Potenzreihe für $|x| < e^{-1}$ und Divergenz für $|x| > e^{-1}$.

d) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leqslant a_n \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Daher konvergiert die Potenzreihe nur für $|z| < 1$.

e) Auch diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{\left|2^k z^{k^2}\right|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \nrightarrow 0$ $(k \to \infty)$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

f) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z + 3i| = 1$ gilt

$$\left|\frac{(z+3i)^n}{n^2}\right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \qquad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z + 3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leqslant 1$.

Aufgabe 3

a) Die Potenzreihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!}\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n\,.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z = 0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!}\, z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z}\big(E(z) - 1\big)\,.$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!}\, z^n$ dargestellte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1\,, \qquad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0)\,.$$

b) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+2} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z+1)^{2n+1} = (z+1)\sin(z+1)\,.$$

Aufgabe 4

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+(z-1)) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n := \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung des Hinweises

$$f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)}\,.$$

Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{2}{3}\frac{1}{1-(-z)} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$$

und für $|2z| < 1$ ist

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-(2z)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n\,.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{1, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $a_n := \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2$ (Rechnung?) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

c) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}\,.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n\,.$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \min\{3, \frac{3}{2}\} = \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$$

mit $a_n := \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{3}$ (Beweis?) beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{3}{2}$.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\to$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 5

a) **i)** Wir zeigen, dass f weder auf $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, noch auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ stetig ist.

Sei $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere $x_n := x + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $f(x_n) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq x = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Wie wir aus der Vorlesung wissen, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen mit $q_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Dann gilt $f(q_n) = q_n \xrightarrow{n\to\infty} x \neq 0 = f(x)$. Infolgedessen ist f nicht stetig in x. Da $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ beliebig war, ist f nicht stetig auf $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

ii) Setze $x_0 := 0$. Wegen $x_0 \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x_0) = x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen begründen, dass es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt. Wir wählen $\delta := \varepsilon > 0$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \left\{\begin{array}{ll} |x| & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{array}\right\} \leq |x| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Das war zu zeigen.

b) **i)** Die rationale Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist nach einem Beispiel der Vorlesung außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners stetig. Wegen $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$ verschwindet der Nenner für $x=1$ oder $x=3$. Daher ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig, so dass auch f auf $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$ stetig ist. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,3\}$

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}.$$

Somit ist $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-2}{1-3} = \frac{1}{2} = f(1)$, d.h. f ist in 1 stetig. Da 3 eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers von $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist, existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ nicht. Also ist f in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist). Fazit: f ist auf $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ stetig.

ii) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ nichtnegativ, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leqslant 1+0-15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [-1,0)$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5) \leqslant 0$ und $x^3 \geqslant 0$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für

$x \in [0,3]$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$ (vgl. Aufgabe 5 vom 2. Übungsblatt). Daher ist f jedenfalls außerhalb von $\{-5,-1\}$ stetig. Wegen

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} x+5 = 4 \neq -16 = \lim_{x\to -1+} x^2+2x-15 = \lim_{x\to -1+} f(x)$$

ist f in -1 unstetig. Da x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, erhält man entsprechend, dass f nicht stetig in -5 ist.

Aufgabe 6

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{-1}{\sqrt{9}+3} = -\frac{1}{6}\,,$$

dieser Grenzwert existiert also.

b) Mit dem gleichen Standardtrick wie bei Folgen erhalten wir, dass dieser Grenzwert existiert und dass gilt

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{8+2x^{-1}+x^{-3}}{2+7x^{-2}} = \frac{8+0+0}{2+0} = 4\,.$$

c) Hier hat der Nenner in $x=2$ keine Nullstelle, daher gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+7x+2}{x^3-x^2+3x} = \frac{2^2+7\cdot 2+2}{2^3-2^2+3\cdot 2} = \frac{20}{10} = 2\,.$$

d) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [siehe geometrische Summenformel in Aufgabe 2 b) vom 4. Übungsblatt oder Polynomdivision $(1-x^3):(1-x)$]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1\,.$$

e) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [siehe Aufgabe 2 c) vom 4. Übungsblatt oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x}-2 = a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3-2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4}\,.$$

Folglich hat man

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2+2\sqrt[3]{8+x}+4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8+0}\,)^2+2\sqrt[3]{8+0}+4} = \frac{1}{12}\,.$$

f) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x=3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2-x)/(x+2) \to 6/5 > 0$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2-x}{x^2-x-6} = \frac{1}{x-3}\cdot\frac{x^2-x}{x+2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

Bemerkung: Dass $\lim_{x\to 3+} \frac{1}{x-3} = \infty$ und $\lim_{x\to 3-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ gilt, ergibt sich direkt aus nachstehendem Ergebnis für Folgen: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Nullfolge mit $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $1/a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (bzw. $1/a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$).

g) Für alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x \pm 1} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x \pm 1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x \pm 1}\,)^2 - (\sqrt{x}\,)^2}{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x \pm 1} + \sqrt{x}}\,,$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} &= \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) + \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)} \\
&= \frac{(x-1) - (x+1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)}\,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}\,)(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\,)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2(\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}(\sqrt{1+1/x} + 1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x} + 1\,)\,\sqrt{x}(\sqrt{1-1/x} + \sqrt{1+1/x}\,)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+1/x} + 1\right)\left(\sqrt{1-1/x} + 1\right)\left(\sqrt{1-1/x} + \sqrt{1+1/x}\,\right)} \\
&= \frac{-2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

h) Zähler und Nenner haben 2 als Nullstelle; Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned}
&x^4 - 11x^3 + 34x^2 - 36x + 8 = (x-2)(x^3 - 9x^2 + 16x - 4) \qquad \text{und} \\
&3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4 = (x-2)(3x^3 - 10x^2 + 9x - 2).
\end{aligned}$$

Die beiden Polynome $x^3 - 9x^2 + 16x - 4$ und $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$ haben ebenfalls 2 als Nullstelle; eine weitere Polynomdivision liefert

$$\begin{aligned}
&x^3 - 9x^2 + 16x - 4 = (x-2)(x^2 - 7x + 2) \qquad \text{und} \\
&3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = (x-2)(3x^2 - 4x + 1).
\end{aligned}$$

Sofern die Ausdrücke definiert sind, gilt also

$$\frac{x^4 - 11x^3 + 34x^2 - 36x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4} = \frac{(x-2)^2(x^2 - 7x + 2)}{(x-2)^2(3x^2 - 4x + 1)} = \frac{x^2 - 7x + 2}{3x^2 - 4x + 1}.$$

Weiter ist 2 keine Nullstelle von $3x^2 - 4x + 1$.

Wir schließen, dass der gesuchte Grenzwert exisitiert und dass gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 11x^3 + 34x^2 - 36x + 8}{3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2 - 7x + 2)}{\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x + 1)} = \frac{-8}{5} = -\frac{8}{5}.$$