Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir berechnen zunächst

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots}{y}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^3}{4!}+\ldots}{1}=1$$

(Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Stetigkeit von Potenzreihen). Für jedes $a\in\mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}=\lim_{x\to a}e^a\,\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=\lim_{y\to 0}e^a\,\frac{e^y-1}{y}=e^a\cdot 1=e^a.$$

b) Zunächst zeigen wir $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Hierzu betrachten wir die Reihenentwicklung des Sinus

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\ldots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+-\ldots\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Aus $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ folgt insbesondere $\sin x\neq 0$ in der Nähe von $x_0=0$. Für jede Folge (x_n) mit $x_n\to 0$ und $x_n\neq 0$ hat man also $\sin x_n\to 0$ und $\sin x_n\neq 0$ für fast alle n. Daher folgt mit $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$ (vgl. Teil a) mit $a=0$)

$$\frac{e^{\sin x_n}-1}{\sin x_n}\xrightarrow{n\to\infty}1\,,\qquad\text{also}\qquad\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\xrightarrow{x\to 0}1.$$

Nach den Grenzwertsätzen existiert der zu untersuchende Grenzwert und es gilt

$$1=1\cdot 1=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}\,.$$

c) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x\neq 0$

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{x-(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots)}{x(x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots)}=\frac{\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{5!}x^5+\ldots}{x^2-\frac{1}{3!}x^4+\ldots}=\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}\,,$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,\frac{\frac{1}{3!}x-\frac{1}{5!}x^3+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}x^2+\ldots}{1-\frac{1}{3!}x^2+\ldots}=\frac{\frac{1}{3!}}{1}=\frac{1}{6}\,.$$

d) Für jedes $x > 0$ gilt

$$\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} \cdot \left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{1/2}.$$

Wie in der Saalübung vom 13.01. gesehen, gilt $\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e$. Demzufolge ist auch

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} = e\,,$$

und wegen $\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x+1/2} = 1$ ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{x+1/2} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1/2}\right)^{1/2} = e\cdot 1^{1/2} = e\,.$$

Alternativ: Aufgrund von $\frac{x}{e^x-1} \xrightarrow{x\to 0} 1$ ergibt sich

$$\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{e^{\ln y}-1} = 1\,, \quad \text{denn} \quad \ln y \xrightarrow{y\to 1} 0\,.$$

Wir setzen nun $f(x) := \frac{2x+3}{2x+1}$. Dann gilt $f(x) = \frac{2+3/x}{2+1/x} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{2+0}{2+0} = 1$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\ln(f(x))^{x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left((x+1)\ln f(x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left((x+1)(f(x)-1)\frac{\ln f(x)}{f(x)-1}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{f(x)-1} = \lim_{x\to\infty}(x+1)(f(x)-1)\cdot 1\\
&= \lim_{x\to\infty}(x+1)\frac{2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+2/x}{2+1/x} = 1\,.
\end{aligned}$$

Für den zu untersuchenden Grenzwert ergibt sich also wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{x+1} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(f(x))^{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln(f(x))^{x+1}} = e^1 = e\,.$$

Aufgabe 2

a) Für $t \in (-1,1)\setminus\{0\}$ setze $y := \ln(1+t)$. Dann ist $t = e^y - 1$ und wegen $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1$ (vgl. Aufgabe 1 a) mit $a = 0$) folgt

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}} = 1.$$

b) Für $x = 0$ ist die Aussage klar, weil dann auf der linken und rechten Seite der Gleichung 1 steht. Sei $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest. Da $(\frac{x}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, liefert Teil a)

$$1 = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{x/n}\,.$$

Deshalb ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit des Logarithmus

$$\begin{aligned}
&1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)\\
\iff\quad & x = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \quad\iff\quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Sei $x > 0$. Wir formen die gegebene Gleichung $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ äquivalent um

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x \quad &\Longleftrightarrow \quad (e^{\ln x})^{\sqrt{x}} = (e^{\ln\sqrt{x}})^x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{(\ln x)\sqrt{x}} = e^{(\frac{1}{2}\ln x)x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\ln x)\sqrt{x} = (\tfrac{1}{2}\ln x)x \quad \Longleftrightarrow \quad (\ln x)(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x) = 0\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\ln x = 0$ (also $x = 1$) oder wenn $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x = \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,) = 0$ gilt. Letzteres gilt genau für $\sqrt{x} = 2$, also $x = 4$. (Man beachte $x > 0$.) Somit gilt $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\,)^x$ genau für $x = 1$ oder $x = 4$.

b) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\ln\frac{16}{93}}{\ln\frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}. \end{aligned}$$

c) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7 - 3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 4

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - (1 - x^2)}{x(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1, 1]$: Für jedes $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1 + \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{\geqslant 0}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ bewiesen. Hiernach ist $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.

Nun zeigen wir $[-1, 1] \subset f([-1, 1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1, 1]$. Wegen $-1 = f(-1)$ und $1 = f(1)$ ist $y_0 \in [f(-1), f(1)]$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) \,:\, x \in [-1, 1]\} = f([-1, 1])$. Da $y_0 \in [-1, 1]$ beliebig war, folgt $[-1, 1] \subset f([-1, 1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1, 1]) = [-1, 1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\ &\overset{1-xy\geqslant 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\ &\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1} : \underbrace{[-1, 1]}_{=f([-1,1])} \to [-1, 1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\ &= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1)(1 - x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0\,, \end{aligned}$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach einem Satz der Vorlesung auch.

Aufgabe 5

a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

Bemerkung: Die Aussage ist i.a. falsch, wenn man $[a, b]$ durch das offene Intervall (a, b) ersetzt. Beispielsweise besitzt die Funktion $g\colon (0, 1) \to (0, 1)$, $g(x) := \frac{1}{2}\,x$, in $(0, 1)$ keinen Fixpunkt, denn aus $g(x) = x$ folgt $x = 0 \notin (0, 1)$.

b) **i)** Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Zudem ist für $x \geqslant 0$ offenbar $f(x) \geqslant 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f\colon [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$.

ii) Wir verifizieren zunächst, dass die Funktion $f\colon [0, 2] \to [0, 2]$ monoton wachsend ist. Für alle $x, y \in [0, 2]$ gilt nämlich

$$x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x+3} \geqslant \frac{1}{y+3} \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1 - \frac{1}{y+3} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)\,.$$

Nun zeigen wir, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n := f(y_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$, monoton ist. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall $y_0 \leqslant f(y_0)$: Beh.: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend, d.h. $y_{n-1} \leqslant y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion:
IA ($n = 1$): Es ist $y_0 \leqslant f(y_0) = y_1$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $y_{n-1} \leqslant y_n$ (IV). Da f monoton wachsend ist, folgt

$$y_n = f(y_{n-1}) \overset{\text{IV}}{\leqslant} f(y_n) = y_{n+1}\,.$$

2. Fall $y_0 > f(y_0)$: Beh.: Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton fallend, d.h. $y_{n-1} \geqslant y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies kann man ähnlich wie eben durch vollständige Induktion beweisen.

Außerdem gilt $y_0 \in [0, 2]$ und $y_n = f(y_{n-1}) \in [0, 2]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt.

Die beschränkte, monotone Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nach dem Monotoniekriterium.

Bemerkung: Macht man in der Rekursionsformel $y_n = f(y_{n-1})$ den Grenzübergang $n \to \infty$ und beachtet dabei die Stetigkeit von f, so ergibt sich für den Grenzwert a der Folge (y_n) die Gleichung

$$a = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(y_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = f(a)\,,$$

d.h. a ist Fixpunkt von f. Gemäß der Definition von f gilt also $a = \frac{a+2}{a+3}$. Nach Multiplikation mit $a + 3$ erhält man die quadratische Gleichung $a^2 + 2a - 2 = 0$ in a, die genau für $a = -1 + \sqrt{3}$ oder $a = -1 - \sqrt{3}$ erfüllt ist. Wegen $y_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ muss $a \geqslant 0$ gelten, was auf $a = -1 + \sqrt{3}$ führt.

Aufgabe 6

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Nach einem Satz der Vorlesung nimmt die stetige Funktion f auf $[a, b]$ ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x) \geqslant f(x_0)$ für alle $x \in [a, b]$. Da $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, ist insbesondere $f(x_0) > 0$. Hieraus folgt für jedes $x \in [a, b]$

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{1}{f(x_0)} =: C < \infty\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{f}$ ist also nach oben durch C beschränkt; eine untere Schranke von $\frac{1}{f}$ ist z.B. 0.