Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2011/12
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Matthias Uhl

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) i) Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x>0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot\left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x>0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

ii) Auf $(0,\pi/2)$ ist g differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cdot\cos x \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}\cdot(-\sin x) - \frac{-1}{\sqrt{\cos^2(x)}}\cdot\cos x = \frac{-\sin x}{|\sin(x)|} + \frac{\cos x}{|\cos(x)|} \\ &= -1+1 = 0\,, \qquad \text{da } \sin x>0, \cos x>0 \text{ für alle } x\in(0,\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Folglich ist g auf $(0,\pi/2)$ konstant mit

$$g(x) = g(\pi/4) = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) - \arccos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \pi/4 - \pi/4 = 0 \qquad \text{für alle } x\in(0,\pi/2)\,.$$

Außerdem sind

$$\begin{aligned} g(0) &= \arcsin(1) - \arccos(0) = \pi/2 - \pi/2 = 0\,, \\ g(\pi/2) &= \arcsin(0) - \arccos(1) = 0 - 0 = 0\,. \end{aligned}$$

b) Die Funktion $f\colon(0,\infty)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ ist auf $(0,\infty)$ differenzierbar. Um das Monotonieverhalten von f zu untersuchen, betrachten wir f'. Für jedes $x>0$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}\ \begin{cases} >0 & \text{für } x<e, \\ <0 & \text{für } x>e. \end{cases}$$

Somit ist f auf $\begin{cases}(0,e)\\(e,\infty)\end{cases}$ streng monoton $\begin{cases}\text{wachsend}\\\text{fallend}\end{cases}$. Für $x,y\in(0,\infty)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x^y > y^x \quad &\iff \quad e^{y\cdot\ln(x)} > e^{x\cdot\ln(y)} \quad \overset{\text{Exp.fkt. streng mon. wachsend}}{\iff} \quad y\cdot\ln(x) > x\cdot\ln(y) \\ &\iff \quad \frac{\ln(x)}{x} > \frac{\ln(y)}{y} \quad \iff \quad f(x) > f(y)\,. \end{aligned}$$

Da $\pi>e$ und f auf (e,∞) streng monoton fallend ist, folgt $f(\pi)<f(e)$. Deshalb liefert obige Äquivalenzkette $e^\pi>\pi^e$.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$ auf Extremstellen. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2(x-a_k) = 2nx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

Also ist

$$f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k =: x_0\,.$$

Es gilt $f''(x) = 2n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere $f''(x_0) = 2n > 0$. Nach der Bemerkung in Abschnitt 10.10 ist x_0 die Stelle eines lokalen Minimums von f. Wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$ nimmt die stetige Funktion f in x_0 ihr globales Minimum an. Deshalb ist $a = x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$, d.h. das anzugebende Messergebnis entspricht dem arithmetischen Mittel aller Messwerte.

Aufgabe 3

a) Wir versuchen, ob wir die Regeln von de l'Hospital anwenden können. Hier konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, die Ableitung des Nenners ist in der Nähe von 0 ungleich 0, aber

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\cos(1/x))'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + x^2\sin(1/x)\frac{1}{x^2}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(1/x) + \sin(1/x)}{\cos x}$$

existiert nicht, denn für $x_n := ((n+\frac{1}{2})\pi)^{-1}$ hat der Bruch den Wert $(-1)^n/\cos x_n$. Die Regel von de l'Hospital ist nicht anwendbar; der ursprüngliche Grenzwert existiert aber:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\cos(1/x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

b) Wegen $\lim_{x\to 0} \sin(\cos x) = \sin(\cos 0) = \sin(1) \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(\cos x)} = \frac{0}{\sin(1)} = 0\,.$$

c) Hier wenden wir zweimal hintereinander die Regel von de l'Hospital an (jeweils für „$\frac{0}{0}$"; die Ableitung des Nenners hat in der Nähe von 1 keine Nullstellen). Wegen $(x^x)' = (e^{x\ln x})' = x^x(x\ln x)' = x^x(1+\ln x)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1+\ln x)^2 + x^x\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+1}{-1} = -2\,.$$

d) Hier kann man die Regel von de l'Hospital zweimal anwenden (jeweils „$\frac{\infty}{\infty}$" und die Ableitung des Nenners ist für positive x ungleich 0). Dies führt auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{(falls die Grenzwerte existieren),}$$

hilft also nicht, den Grenzwert zu berechnen. Einfaches Kürzen mit e^x liefert aber

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

Aufgabe 4

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt, d.h. $\xi \in [0,x]$, mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!}\cdot\frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

b) Die durch $f(x) := \ln(2+x)$ gegebene Funktion $f\colon (-2,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar und es gilt für jedes $x \in (-2,\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(2+x)^2}\,.$$

Also haben wir $f(0) = \ln 2$ und $f'(0) = \frac{1}{2}$. Nach dem Satz von Taylor gibt es zu jedem $x \in [-1,1]$ ein ξ zwischen 0 und x mit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}\,x^2 = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2(2+\xi)^2}\,.$$

Daher gilt wegen $\xi \in [-1,1]$

$$\left| f(x) - \ln 2 - \frac{x}{2} \right| = \left| \frac{x^2}{2(2+\xi)^2} \right| \leqslant \frac{x^2}{2(2-1)^2} = \frac{x^2}{2}\,.$$

Wir können somit $a = \ln 2$ und $b = c = \frac{1}{2}$ wählen.

c) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2 \cdot \tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f; \frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f; \tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x - \tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} f''(\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x - \tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f; \tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x - \tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\bigl|f(x) - T_2(f; \tfrac{1}{2})(x)\bigr| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x - \tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Bigl(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Bigr) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.

Aufgabe 5

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

absolut konvergent und damit konvergent, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Bigl|(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\Bigr| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1\,.$$

Somit folgt für den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe $R \geqslant 1$. Gemäß 10.11 ist f auf $(-1,1)$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}\,.$$

Wegen

$$\bigl(\ln(1+x)\bigr)' = \frac{1}{1+x}$$

stimmen die Ableitungen von f und $x \mapsto \ln(1+x)$ überein. Daher unterscheiden sich beide Funktionen nur durch eine additive Konstante. Wegen $f(0) = 0 = \ln(1+0)$ ist diese Null und die behauptete Identität ist bewiesen.

Bemerkung: Die Reihendarstellung von $g(x) := \ln(1+x)$ um 0 lässt sich auch mit Hilfe des Satzes von Taylor herleiten. Man verwendet dazu $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$ für alle $x \in (-1,1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Bezeichnen wir die Funktion, die durch die Reihe definiert wird, mit f (man beachte, dass f auf $(-1,1)$ wegen $\sum_{n=2}^{\infty}|(-1)^n\frac{x^n}{n^2-n}| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}|x|^n = \frac{1}{1-|x|} - 1 - |x|$ wohldefiniert ist!), so gilt für jedes $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\,.$$

Diese Reihe stellt laut a)-Teil die Funktion $x \mapsto \ln(1+x)$ dar, d.h. es ist $f'(x) = \ln(1+x)$. Aufgrund von $(y\ln y - y)' = \ln y$ folgt für alle $|x| < 1$

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - (1+x) + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0$ ergibt sich $c = 1$. Somit erhält man als Endergebnis

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2-n} = (1+x)\ln(1+x) - x\,.$$

Bemerkung: Man kommt auch ohne Differenzieren aus; wegen der Darstellung

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2-n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^n}{n-1} - \frac{x^n}{n}\right) = x\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

lässt sich der Wert direkt mit Hilfe der Logarithmusreihe aus a) ermitteln.

c) Für jedes $x \in (-1,1)$ gilt

$$f(x) = \ln\big((1-x)(1+x)\big) = \ln(1-x) + \ln(1+x) \overset{\text{a)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n + (-1)^{n+1}}{n}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{-1+(-1)^{n+1}}{n}}_{=:a_n}\,x^n$$

Wie in Abschnitt 10.11 der Vorlesung gesehen, ergibt sich

$$f^{(20)}(0) = 20!\,a_{20} = 20!\,\frac{-1-1}{20} = -2\cdot 19!\,,$$
$$f^{(31)}(0) = 31!\,a_{31} = 31!\,\frac{-1+1}{31} = 0\,.$$

Aufgabe 6

Wir machen einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, zu bestimmende Koeffizienten sind. Wegen $y(0) = 1$ ist $a_0 = 1$. Eine Potenzreihe dürfen wir im Inneren ihres Konvergenzintervalls nach Satz 10.11 gliedweise differenzieren; es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}\,.$$

Dies soll für jedes $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen mit

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-1}\,.$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (Koeffizientenvergleich) ist dies genau dann erfüllt, wenn

$$a_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad na_n = a_{n-2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt. Durch Induktion erhält man hieraus $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$ und $a_{2k} = \frac{1}{2^k k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Somit ist für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} = 0 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2}\,.$$

Wie man leicht nachrechnet, genügt $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2/2}$, tatsächlich den geforderten Bedingungen.