Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik, Wintersemester 2011/12

Dirk Hundertmark
basierend auf einem Skript von Peer Kunstmann*
Fakultät für Mathematik, Institut für Analysis
Karlsruher Institut für Technologie
Kaiserstr. 89, D – 76128 Karlsruhe, Germany

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

*Thank you, thank you, thank you... ;-)

1 Logische Grundlagen

1.1 Aussagen

Definition: Eine *Aussage* ist ein Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** sein kann.

Beispiele: i) Der Mond ist ein grüner Käse. (f)
ii) 2 ist eine Primzahl. (w)
iii) Gehen sie geradeaus und dann hinten links! (keine Aussage)

Bemerkung: Wir werden uns auf **mathematische Aussagen** konzentrieren.

Aussagen bezeichnen wir im folgenden mit A, B, C, ...

1.2 Verknüpfung von Aussagen

Wir erklären die logische Verknüpfung von Aussagen durch sogenannte *Wahrheitstafeln.*

$A \wedge B$ (*logisches "und"*)

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

$A \vee B$ (*logisches "oder"*)

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Achtung: Das logische "oder" ist nicht exklusiv, dh es ist nicht ausgeschlossen, dass beide Aussagen A und B wahr sind.

Negation $\neg A$

A	w	f
$\neg A$	f	w

Man sagt: "non A" oder "nicht A".

Implikation $A \Rightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Man sagt: "wenn A, dann B", "A impliziert B", "aus A folgt B".
Bemerkung: Aus Falschem folgt Beliebiges (*ex falso quodlibet*).
Beispiel: Aus $1 = 2$ folgt: ich bin der Papst. (w)

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Man sagt: "A ist äquivalent zu B", "A ist gleichbedeutend mit B", "A genau dann, wenn B", " A dann und nur dann, wenn B".

1.3 Regeln

$\neg$ bindet stärker als $\wedge/\vee$; $\wedge/\vee$ bindet stärker als $\Rightarrow/\Leftrightarrow$.

$\neg(\neg A) \quad \Leftrightarrow A$; doppelte Negation.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$; Äquivalenz bedeutet zwei Implikationen.
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$; Negation von "und".
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$; Negation von "oder".
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$; Umformulierung der Implikation.
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$; Negation der Implikation.
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$; *Kontraposition*.

Beispiel: Wenn ich nicht der Papst bin, dann ist $1 \neq 2$. (w)

Kommutativität: $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.
Assoziativität: $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$, $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. Deshalb kann man hier die Klammern weglassen.
Distributivität: $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten (**Tertium non datur**): $A \vee \neg A$.

1.4 Quantoren

Eine *Aussageform* $A(x)$, $A(x, y)$, ... ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen x, y, ... enthält und der nach dem Ersetzen dieser Variablen durch konkrete Objekte in eine Aussage übergeht.

Beispiel: x ist eine Primzahl.

Allquantor $\forall x : A(x)$ bedeutet: für alle Objekte x ist die Aussage $A(x)$ wahr.

Existenzquantor $\exists x : A(x)$ bedeutet: es gibt (mindestens) ein Objekt x, für das die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Negation:
$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg A(x))$ und $\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg A(x))$.

In den allermeisten Fällen werden Quantoren *eingeschränkt* und beziehen sich dann nur auf gewisse Objekte, z.B. $\forall x$ mit $A(x)$: $B(x)$. Negation ist dann $\exists x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)$.

Beispiel: Alle Primzahlen sind ungerade. (f)
Setzen wir $A(x)$: "x ist Primzahl" und $B(x)$: "x ist ungerade", so haben wir die Aussage $\forall x$ mit $A(x)$: $B(x)$. Deren Negation ist $\exists x$ mit $A(x)$: $\neg B(x)$, also "Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist" (w).

2 Mengen

2.1 Der Begriff der Menge

“Definition”: “Eine *Menge* ist die Zusammenfassung wohlbestimmter, wohlunterschiedener Objekte der Anschauung oder des Denkens zu einem neuen Ganzen.”

Diese Objekte heißen *Elemente* der Menge.
$x \in M$ bedeutet: x ist Element der Menge M, dh x gehört zu M.
$x \notin M$ bedeutet. x gehört nicht zu M, dh $x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Für jede Menge M und jedes x gilt entweder $x \in M$ oder $x \notin M$.

Schreibweisen: Ist $A(x)$ eine Aussageform, so kann man schreiben

$$M = \{x : A(x)\} = \text{Menge aller } x, \text{ für die } A(x) \text{ gilt,}$$

also z.B. $M = \{x : x \in M\}$, $M = \{x : x \text{ ist Primzahl}\}$. Häufig schreibt man auch, wenn die Menge M gegeben ist, $\{x \in M : A(x)\}$ für $\{x : x \in M \wedge A(x)\}$.

Eine andere Möglichkeit ist die Aufzählung, etwa $M = \{1, 2, 3, 9\}$.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Seien M_1, M_2 Mengen.

Definition: $M_1 \subset M_2 :\Leftrightarrow \forall x : x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$ (bzw. $\forall x \in M_1 : x \in M_2$).
“M_1 ist Teilmenge von M_2”. Gelegentlich schreibe ich auch $\subseteq$ statt $\subset$. Gleichheit ist bei “$\subset$” nicht ausgeschlossen, dh es gilt $M \subset M$ für jede Menge M.

Für $M_1 \subset M_2$ und $M_1 \neq M_2$ schreibe ich der Deutlichkeit halber $M_1 \overset{\subset}{\neq} M_2$.

Gleichheit von Mengen: $M_1 = M_2$ bedeutet, dass M_1 und M_2 dieselben Elemente enthalten, also $\forall x : x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$. Nach 1.3 bedeutet $M_1 = M_2$ also $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$.

Beispiele: Wir schreiben $\mathbb{N}$ für die *Menge der natürlichen Zahlen*, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist gerade Primzahl}\} = \{2\}$,
$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl} \wedge x > 2\} \subset \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$.

2.3 Operationen mit Mengen

Seien M_1, M_2, M_3 und Q Mengen.

(a) *Durchschnitt* $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$.

(b) *Vereinigung* $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \vee x \in M_2\}$.

Regeln: Wegen 1.3 gelten:
Kommutativität $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$.
Assoziativität $M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$, $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$.
Distributivität

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3), \quad M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

Außerdem ist $M_1 \subset M_1 \cup M_2$, $M_2 \subset M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 \subset M_1$, $M_1 \cap M_2 \subset M_2$.

(c) *Differenz* $M_1 \setminus M_2 := \{x \in M_1 : x \notin M_2\}$ ("M_1 ohne M_2").

Beispiel: $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl}\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\} = \{2\}$.

de Morgansche Regeln: Wegen 1.3 gelten auch

$$Q \setminus (M_1 \cup M_2) = (Q \setminus M_1) \cap (Q \setminus M_2) \qquad Q \setminus (M_1 \cap M_2) = (Q \setminus M_1) \cup (Q \setminus M_2).$$

2.4 Die leere Menge

Die *leere Menge* $\emptyset$ enthält keine Elemente, dh $\forall x : x \notin \emptyset$.

Regeln: $M \cup \emptyset = M$, $M \setminus \emptyset = M$, $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \setminus M = \emptyset$, $\emptyset \subset M$ für jede Menge M.

2.5 Die Potenzmenge

Ist M eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von M

$$\mathrm{Pot}(M) := \{N : N \subset M\}$$

die *Potenzmenge von M*.

Bemerkung: Für jede Menge M gilt: $M \in \mathrm{Pot}(M)$, $\emptyset \in \mathrm{Pot}(M)$, aber auch $\emptyset \subset \mathrm{Pot}(M)$ (vgl. 2.4).

Beispiel: $M = \{1, 2\}$, $\mathrm{Pot}(M) = \{\,\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\,\}$.

2.6 Das kartesische Produkt

Sei $n \in \mathbb{N}$. Seien M_1, M_2, $\ldots$, M_n Mengen. Die MEnge der geordneten n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_j \in M_j$ für alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ heißt das *kartesische Produkt* $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ der Mengen M_1, M_2, $\ldots$, M_n. Also

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_j \in M_j\}.$$

Wir schreiben M^n, falls $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ gilt.

Beispiele:
i) $M_1 = \{0,1\}$, $M_2 = \{1,2,3\}$, $M_1 \times M_2 = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$.
ii) $M = \{0,1\}$, $M^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

3 Funktionen

3.1 Zum Begriff der Funktion

Seien X, Y Mengen. Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) $f : X \to Y$ ordnet jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zu. Für das einem gegebenen $x \in X$ zugeornete $y \in Y$ schreiben wir $f(x)$.

Schreibweise $f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ ("f von X nach Y, x wird abgebildet auf $f(x)$").

Beispiel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2 \cdot x - 1$, dann ist etwa $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ etc.

Graph von f $\{(x, f(x)) : x \in X\}$.

Eine Funktion von X nach Y ist also eine Teilmenge M von $X \times Y$, die folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} &\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in M \\ &\forall x \in X \forall y_1, y_2 \in Y : (x, y_1) \in M \wedge (x, y_2) \in M \;\Rightarrow\; y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Für eine Funktion $f : X \to Y$ heißt X *Definitionsbereich* und Y *Wertebereich* von f. Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ *Bild von A unter f*, und für $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ *Urbild von B unter f*. Insbesondere heißt $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ *Bild von f* (Menge aller $y \in Y$, die von f getroffen werden).

Im Beispiel oben ist $f(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist ungerade}\}$ und etwa $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \{1, 2, 3\}$.

Definition: Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) f heißt *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt, dh falls jedes $y \in Y$ von f getroffen wird.

(b) f heißt *injektiv*, falls gilt $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

(c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiele: i) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv und nicht surjektiv.
ii) Die Funktion $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x \text{ ist gerade} \\ 1, & x \text{ ist ungerade} \end{cases}$ ist surjektiv und nicht injektiv.

3.2 Komposition

Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen, so definiert

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

eine Funktion $g \circ f$ ("g nach f"), die *Hintereinanderausführung* oder *Komposition* von f und g.

Satz: Sind $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ Funktionen, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

dh die Hintereinanderausführung von Funktionen ist assoziativ.

3.3 Die Umkehrabbildung

Ist $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion, so definiert

$$Y \to X, \quad y \mapsto x, \text{ falls } f(x) = y$$

eine Funktion f^{-1}, die *Umkehrabbildung* (oder *Umkehrfunktion*) von f.

Beachte: Da f surjektiv ist, gibt es zu jedem y ein solches x. Da f injektiv ist, ist dieses x eindeutig bestimmt. Somit ist f^{-1} tatsächlich eine Funktion.

Beispiel: Ist $\emptyset \neq X$ ein Menge, so heißt die Funktion $X \to X$, $x \mapsto x$ die *Identität* auf X, geschrieben Id_X oder id_X. Die Funktion id_X ist bijektiv und es ist $(\mathrm{id}_X)^{-1} = \mathrm{id}_X$.

Bemerkung: Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

[Für jedes $x \in X$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$ nach Definition von f^{-1}. Für $y \in Y$ und $x := f^{-1}(y)$ ist $f(x) = y$ (vgl. 3.3), also $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$.]

Satz: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Funktionen mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, so ist f bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$.

Beweis: Die Funktion $g \circ f$ ist injektiv, also ist f injektiv. Die Funktion $f \circ g$ ist surjektiv, also ist f surjektiv. Gezeigt: f ist bijektiv. Nach 3.4 existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$. Noch zu zeigen: $\forall y \in Y : g(y) = f^{-1}(y)$. Sei $y \in Y$. Setze $x := g(y)$. Dann gilt $f(x) = f(g(y)) = y$ nach Voraussetzung und demnach $x = f^{-1}(y)$ nach 3.3. ∎

Bemerkung: Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt auch $f = g^{-1}$ und insbesondere $(f^{-1})^{-1} = f$.

Satz: Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Funktionen, so ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv, und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X.$$

[Das ist klar. Die Formel heißt "Hemd-Jacken-Regel" oder vielleicht besser "Unterhosen-Hosen-Regel:" Wenn man sich anzieht, dann zieht man zuerst die Unterhose an und dann erst die Hose[1], beim Ausziehen genau anders herum... ;-)] ∎

[1] hoffentlich....

4 Die reellen Zahlen

Grundmenge der Analysis ist die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*. Wir führen diese Menge durch *Axiome* ein dh durch grundlegende Eigenschaften, aus denen sich *alle weiteren Rechenregeln* herleiten lassen.

4.1 Körperaxiome

Es gibt *Verknüpfungen* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("plus", wir schreiben $a + b$) und $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("mal", wir schreiben ab oder $a \cdot b$) mit

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad (A1) \qquad (ab)c = a(bc) \quad (A5)$$

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad (A2) \qquad \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad (A6)$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 \quad (A3) \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1 \quad (A7)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad (A4) \qquad ab = ba \quad (A8)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac \quad (A9)$$

Dabei sind $(A1)$ und $(A5)$ die *Assoziativgesetze*, $(A4)$ und $(A8)$ die *Kommutativgesetze*, und $(A9)$ ist das *Distributivgesetz*.

Schreibweisen: Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir $a - b := a + (-b)$ und, falls $b \neq 0$ ist, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$.

Bemerkung: Aus $(A1) - (A9)$ lassen sich alle Rechenregeln bzgl. "+" und "·" herleiten. Diese werden von nun an als bekannt vorausgesetzt.

Beispiele: (1) Die Null in $(A2)$ ist eindeutig, ebenso die Eins in $(A6)$. [Ist $\tilde{0} \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$, so folgt wegen $(A2)$ und $(A4)$: $0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$.]

(2) Die Elemente a in $(A3)$ und a^{-1} in $(A7)$ sind eindeutig bestimmt. Außerdem gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$ $-(-a) = a$ und, falls $a \neq 0$ ist, $(a^{-1})^{-1} = a$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0$ [Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach $(A2)$ und $(A9)$ gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Setzen wir $b := a \cdot 0$, so folgt $b = b + b$ und addieren von $-b$ auf beiden Seiten gibt $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$. Also ist $b = 0$.]

(4) $\forall a \in \mathbb{R}$: $-a = (-1) \cdot a$. [Es gilt (nach $(A6)$, $(A9)$, und (3)): $a + a \cdot (-1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 0 = 0$, also $-a = a \cdot (-1) = (-1) \cdot a$.]

(5) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 = (-a)^2$, wobei $a^2 := a \cdot a$. [Es ist, nach (4), $(A5)$, $(A8)$ und (2): $(-a)^2 = (-a) \cdot (-1) \cdot a = (-(-a)) \cdot a = a^2$.]

4.2 Anordnungsaxiome

In $\mathbb{R}$ ist eine *Ordnung* "$\leq$" gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$
\begin{array}{ll}
(A10) & \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ oder } b \leq a, \\
(A11) & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq c \Rightarrow a \leq c, \\
(A12) & \forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } b \leq a \Rightarrow a = b, \\
(A13) & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \\
(A14) & \forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ und } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc.
\end{array}
$$

Schreibweisen: $b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b$; $a < b :\Leftrightarrow a \leq b$ und $a \neq b$; $b > a :\Leftrightarrow a < b$.

Bemerkung: Aus $(A1) - (A14)$ lassen sich alle Rechenregeln für Ungleichungen herleiten. Diese setzen wir von nun an als bekannt voraus.

Beispiele: (1) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$.
Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. Fall 1, $a \geq 0$: Dann gilt $a \cdot a \geq 0 \cdot a$ nach $(A14)$ und somit $a^2 \geq 0$ nach 4.1(3).
Fall 2, $a < 0$: Dann gilt nach $(A13)$: $0 = a + (-a) \leq 0 + (-a) = -a$. Somit ist $(-a)^2 \geq 0$ nach Fall 1. Nach 4.1(5) ist dann $a^2 = (-a)^2 \geq 0$.

(2) Aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$. [$c \leq 0 \Rightarrow -c \geq 0$ (siehe Beweis von (1)). Nach $(A14)$ ist dann $a(-c) \leq b(-c)$. Beachtet man $a(-c) = -ac$ und $b(-c) = -bc$ und addiert $ac + bc$ zu der Ungleichung ($(A13)$!), so erhält man $bc \leq ac$.]

Intervalle: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir setzen:

$$
\begin{array}{rcll}
[a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{abgeschlossenes Intervall,} \\
(a, b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{offenes Intervall,} \\
[a, b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{halboffenes Intervall,} \\
(a, b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{halboffenes Intervall,} \\
[a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, & \\
(a, \infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, & \\
(-\infty, a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, & \\
(-\infty, a) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\}. &
\end{array}
$$

Weiter: $[a, a] := \{a\}$ und $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

4.3 Der Betrag

Für $a \in \mathbb{R}$ heißt $|a| := \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ der *Betrag von a*.

Beispiele: $|1| = 1$, da $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$ (vgl. 4.2(2)), $|-2| = -(-2) = 2$, da $2 = 1 + 1 \geq 1 + 0 = 1 \geq 0$ und somit $-2 \leq 0$.

Beachte: Es gilt $|a| = |-a|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, also auch $|a - b| = |b - a|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Anschaulich ist $|a - b|$ der **Abstand** von a und b auf der Zahlengeraden.

Regeln: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(1) $|a| \geq 0$;
(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
(4) $\pm a \leq |a|$ und $[|a| \leq c \Leftrightarrow a \leq c$ und $-a \leq c]$;
(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *Dreiecksungleichung*;
(6) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *umgekehrte Dreiecksungleichung*.

[(1)-(4) sind leicht. Zu (5): Falls $a + b \geq 0$ ist, so gilt $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ nach (4). Falls $a + b < 0$ ist, so ist $|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$ nach (4).
Zu (6): Nach (5) ist $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ und $|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$. Es folgt $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $|b| - |a| \leq |a - b|$. Nach (4) gilt somit $||a| - |b|| \leq |a - b|$.]

Bemerkung: Setzt man $\max\{a, b\} := \begin{cases} a & , a \geq b \\ b & , a < b \end{cases}$, so ist $|a| = \max\{a, -a\}$.

4.4 Supremum und Infimum

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.

M heißt *nach oben* [*unten*] *beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \forall x \in M : x \leq \gamma$ $[x \geq \gamma]$.

In diesem Fall heißt γ eine *obere Schranke* (OS) [*untere Schranke* (US)] von M.

Eine OS [US] γ von M mit $\gamma \in M$ heißt *Maximum* [*Minimum*] von M und wird mit $\max M$ $[\min M]$ bezeichnet.

Wegen $(A11)$ sind $\max M$ und $\min M$ im Falle der Existenz *eindeutig bestimmt*.

Beispiele: $[1, 2]$ ist nach oben und nach unten beschränkt, es ist $1 = \min M$ und $2 = \max M$.
$(1, \infty)$ ist nach unten, aber nicht nach oben beschränkt und hat kein Minimum.

Definition: Ist γ OS [US] von M mit $\gamma \leq \tilde{\gamma}$ $[\gamma \geq \tilde{\gamma}]$ für **jede** OS [US] $\tilde{\gamma}$ von M, so heißt γ *Supremum* [*Infimum*] von M (**kleinste** OS von M [**größte** US von M]) und wird mit $\sup M$ $[\inf M]$ bezeichnet.

Nach $(A11)$ sind Supremum und Infimum im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Ein Maximum ist immer auch Supremum, und es gilt $\sup M = \max M$ genau dann, wenn $\sup M \in M$ ist (entsprechend für min und inf).

Beispiele: (1) $M = [1, 2)$. M ist nach unten und nach oben beschränkt. Es ist $1 = \min M =$

$\inf M$, M hat kein Maximum, und es ist $\sup M = 2$.
Beweis: 2 ist OS von M. Zeige: es gibt keine echt kleinere obere Schranke. Sei $\gamma < 2$. Zeige: γ ist nicht OS von M. Falls $\gamma \leq 1$ ist, so gilt $\gamma < \frac{3}{2} \in M$, also ist γ keine OS von M. Falls $\gamma > 1$ ist, so ist $\gamma < \frac{\gamma+2}{2} \in M$ und γ ist keine OS von M.

(2) $M = (1, \infty)$: Es ist $1 = \inf M \notin M$ und $\sup M$ existiert nicht.

4.5 Vollständigkeitsaxiom

$(A15)$ Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum.

Folgerung: Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum.

[Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$.
Vorbemerkung: Dann gilt γ ist US von $M \Leftrightarrow -\gamma$ ist OS von $-M$.
Da $M \neq \emptyset$ untere Schranken hat, ist $-M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt, hat also ein Supremum $s := \sup(-M)$. Nach der Vorbemerkung ist $-s$ US von M, und für jede US γ von M ist $-\gamma$ eine OS von $-M$, also $s \leq -\gamma$, dh $\gamma \leq -s$. Somit ist $-s$ größte US von M, dh $-s = \inf M$.]

Definition: Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bemerkung: M beschränkt $\Leftrightarrow \exists \gamma \geq 0 \forall x \in M : |x| \leq \gamma$.

Satz: Sei $\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) A beschränkt $\Rightarrow \inf A \leq \sup A$.

(2) A nach oben [nach unten] beschränkt $\Rightarrow B$ nach oben [nach unten] beschränkt und $\sup B \leq \sup A$ [$\inf B \geq \inf A$].

(3) Sei A nach oben [unten] beschränkt und γ eine OS [US] von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \gamma = \sup A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon \\ [\gamma = \inf A \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x < \gamma + \varepsilon]. \end{aligned}$$

Beweis: (1) und (2) sind leicht.
Zu (3): "$\Rightarrow$": Sei $\gamma = \sup A$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $\gamma - \varepsilon$ keine OS von A.
"$\Leftarrow$" (Kontraposition): Sei $\gamma \neq \sup A =: \tilde{\gamma}$. Dann $\gamma > \tilde{\gamma}$, da γ OS von A ist, und $\varepsilon := \gamma - \tilde{\gamma} > 0$. Für jedes $x \in A$ gilt dann $x \leq \tilde{\gamma} = \gamma - \varepsilon$. Wir haben gezeigt: $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : x \leq \gamma - \varepsilon$, dh $\neg(\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > \gamma - \varepsilon)$.] ∎

4.6 Natürliche Zahlen

Idee ist $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$. D.h. wir möchten $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}$, aber so können wir die natürlichen Zahlen nicht definieren, da wir in der Definition von n als n-mal 1 addieren bereits die Zahl n verwenden, die wir aber erst definieren möchten. Das ist also eine Ringschluss :-(.

Der Ausweg ist es, die natürlichen Zahlen etwas indirekt zu definieren:

Definition: $A \subset \mathbb{R}$ heißt *Induktionsmenge* (oder auch *induktive Menge*, oder kurz *induktiv*), falls $1 \in A$ und $\forall x \in A : x + 1 \in A$.

Beispiele: $\mathbb{R}$, $[1, \infty)$, $\{1\} \cup [2, \infty)$ sind induktiv, $\{1\} \cup (2, \infty)$ ist keine induktive Menge.

Definition: $\mathbb{N} := \bigcap_{A \text{ induktiv}} A$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.

Einschub: Sind $\emptyset \neq X$ eine Menge und $\mathcal{A} \subset \operatorname{Pot}(X)$, so setzt man

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X : \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$$

und, falls $\mathcal{A} \neq \emptyset$,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \in X : \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

Man schreibt manchmal auch $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup \mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap \mathcal{A}$.

Bemerkung: Es ist somit $\mathbb{N} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R} : \ A \text{ ist eine Induktionsmenge } \}$.

Satz: (1) $\mathbb{N}$ ist induktiv [d.h. $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Menge!].

(2) $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.

(3) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(4) Für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

Beweis: (1) Es ist $1 \in \mathbb{N}$, da $1 \in A$ für jede induktive Menge A. Sei $x \in \mathbb{N}$. Zu zeigen: $x + 1 \in \mathbb{N}$. Sei dazu $A \subset \mathbb{R}$ induktiv. Dann gilt $x \in \mathbb{N} \subset A$ und also $x + 1 \in A$ (da A eine Induktionsmenge ist).

(2) **Annahme:** $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Dann existiert $\gamma := \sup \mathbb{N}$. Nach 4.6(3) (für $\varepsilon = 1$) finden wir $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma - 1$. Dann gilt $n + 1 > \gamma$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$, dh γ ist nicht OS von $\mathbb{N}$, Widerspruch.

(3) folgt sofort aus (2).

(4) Sei $b > 0$. Nach (3) gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b} > 0$. Es folgt $\frac{1}{n} < b$. ∎

4.7 Vollständige Induktion

Der Schlüssel zur Induktion ist der folgende

Satz: Ist $A \subset \mathbb{N}$ und ist A eine Induktionsmenge, dann ist bereits $A = \mathbb{N}$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $A \subset \mathbb{N}$. Da A induktiv ist, gilt auch $\mathbb{N} \subset A$. Also ist $A = \mathbb{N}$. ∎

Bemerkung: Damit können wir sehr schnell die folgenden beiden Aussagen zeigen, die uns so offensichtlich erschiene, daß man sich am Anfang fragt, warum man da überhaupt etwas beweisen müsse:

(1) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $m + n \in \mathbb{N}$.

(2) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $mn \in \mathbb{N}$.

Beweis: (1): Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben und definiere $A := \{n \in \mathbb{N} : \ m + n \in \mathbb{N}\}$. Wir wollen $A = \mathbb{N}$ nachweisen. Nach dem Satz reicht es zu zeigen, dass A induktiv ist, und das ist verblüffend einfach:

$1 \in A$: Da wir voraussetzen, daß $m \in \mathbb{N}$ ist und $\mathbb{N}$ induktiv ist, ist auch $m + 1 \in \mathbb{N}$. Also ist $1 \in A$.

$n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$: Falls $n \in A$ ist, dann gilt $m + n \in \mathbb{N}$. Also ist auch

$$m + (n + 1) = \underbrace{(m + n)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$$

und damit ist $n + 1 \in A$, fertig!

(2): Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir definieren nun $A := \{n \in \mathbb{N} : \ mn \in \mathbb{N}\}$ und müssen nachweisen, daß A induktiv ist.

$1 \in A$: Ist einfach, da $m \in \mathbb{N}$ ist und somit auch $m1 = m \in \mathbb{N}$ ist.

$n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$: Sei $n \in A$, d.h. $mn \in \mathbb{N}$. Dann ist nach Teil (1) auch

$$m(n + 1) = mn + n \in \mathbb{N}.$$

∎

Satz [Beweisverfahren durch Induktion]: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{array}{ll} (IA) & A(1) \\ (IS) & \forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(n + 1)). \end{array}$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr, dh es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$.

Beweis: Setze $A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$. Man beachte, daß $A(n)$ wahr ist genau dann wenn $n \in A$. Nach (IA) gilt $1 \in A$. Sei $n \in A$. Dann gilt $A(n)$ und nach (IS) ist auch $A(n+1)$ wahr, dh $n+1 \in A$. Somit ist A eine IM und $A = \mathbb{N}$ folgt aus dem obigen Satz. ∎

Beispiel: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\underbrace{n \geq 1}_{=:A(n)}$.

Beweis durch Induktion nach n:

Induktionsanfang (IA): Es gilt $1 \geq 1$, dh $A(1)$ ist wahr.
Induktionsschluss (IS): Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $A(n)$, dh es gelte $n \geq 1$ (Induktionsvoraussetzung (IV)). Dann ist $n+1 \geq 1+1$ nach (IV) und $1+1 \geq 1+0 = 1$ nach 4.2 und 4.1, also $n+1 \geq 1$ und $A(n+1)$ ist wahr.

Bemerkung: (1) Wir setzen die natürlichen Zahlen ab jetzt als bekannt voraus.
(2) Unsere Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält nicht die Null. Man setzt $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
(3) Eine Variante des Beweises mittels Induktion ist es, den Induktionsanfang (IA) nicht bei $n_0 = 1$ zu haben, sondern bei einer beliebigen Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ (oder in $\mathbb{N}_0$ oder den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$) und dann den Induktionsschluss (IS) für alle $n \geq n_0$ zu verlangen. Dies folgt aus der "normalenÏnduktion durch Verschieben des Index[2].

Definition durch Rekursion (bzw. durch Induktion)

Es sei $G(1)$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $G(n+1)$ definiert unter der Voraussetzung, dass $G(1)$, $G(2)$, $\ldots$, $G(n)$ schon definiert sind.

Dann hat man $G(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiele: (1) *Fakultät*: $1! := 1$ und rekursiv $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowie $0! := 1$. Dann ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(2) Summenzeichen $\sum$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze $\sum_{j=1}^{1} a_j := a_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=1}^{n+1} a_j := (\sum_{j=1}^{n} a_j) + a_{n+1}$. Dann ist $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die leere Summe ist $\sum_{j=1}^{0} a_j := 0$.

(3) Produktzeichen $\prod$: Seien $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Setze $\prod_{j=1}^{1} a_j := a_1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\prod_{j=1}^{n+1} a_j := (\prod_{j=1}^{n} a_j) \cdot a_{n+1}$. Dann ist $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das leere Produkt ist $\prod_{j=1}^{0} a_j := 1$.

(4) Potenzen: Setze für $a \in \mathbb{R}$: $a^0 := 1$ und $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 0$ setzt man $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, also etwa $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ und $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

4.8 Bernoullische Ungleichung

(BU): Sei $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis durch Induktion nach n. IA $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$.

[2] Man mache sich dies klar!

IS Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(1+x)^n \geq 1+nx$ (IV). Dann gilt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

$\blacksquare$

Bemerkung: Wie der Beweis zeigt, ist die Ungleichung strikt, falls $n \geq 2$ und $x \geq -1$, $x \neq 0$.

(1) **Folgerung:** Sei $a \in \mathbb{R}$.
Ist $a > 1$, so gibt es zu jedem $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$.
Ist $a \in (0,1)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis: Ist $a > 1$, so finden wir zu $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{K}{a-1}$ und mit (BU) für $x = a-1$ gilt dann

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx = 1+n(a-1) > 1+K > K.$$

Ist $a \in (0,1)$, so ist $a^{-1} > 1$ und wir finden zu $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^{-n} > \varepsilon^{-1}$, dh mit $a^n < \varepsilon$.

(2) Für alle $x, y \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x^n \leq y^n.$$

[Übungsaufgabe]

4.9 Binomialkoeffizienten

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ setzt man $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (“n über k”).

Etwa: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$.

Lemma: Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Beweis: Es gilt

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n+1-k}{n+1-k}+\frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}\frac{k}{k} = \frac{(n+1-k+k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

$\blacksquare$

(1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

[Übungsaufgabe]

(2) **Binomialsatz:** Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Insbesondere (mit $a = b = 1$), $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis durch Induktion nach n: IA $n = 0$ ist klar.
IS Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
(j = k+1) \quad &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

∎

4.10 Wurzeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq 0$ und $b^n = a$.
Bezeichnung: $b = \sqrt[n]{a}$, "n-te Wurzel aus a".

Bemerkung: Also existiert etwa die reelle Zahl $\sqrt{2}$ (bekannt: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Wir ziehen hier nur Wurzeln aus Zahlen ≥ 0!

Folgerung: Für alle $a, b \geq 0$ gilt:

$$a \leq b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$$

Beweis des Satzes: Der Fall $a = 0$ ist klar. Sei also $a > 0$. Setze $M := \{x > 0 : x^n < a\}$. Dann ist $1 + a$ eine OS von M und nach 4.8(1) ist M nicht leer. Also existiert $b := \sup M$.

Vorbemerkung: Für $\delta \in (0, b)$ gilt:

$$\begin{aligned} (b+\delta)^n &\leq b^n + \delta 2^n b^{n-1} \\ (b-\delta)^n &\geq b^n - \delta 2^n b^{n-1}. \end{aligned}$$

[Nach dem Binomialsatz ist

$$(b+\delta)^n = b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\delta^k b^{n-k}}_{\leq \delta b^{n-1}} \leq b^n + \delta b^{n-1} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}_{\leq 2^n} \leq b^n + \delta 2^n b^{n-1}$$

und die andere Ungleichung zeigt man ähnlich.]

Wir behaupten $b^n = a$.
Annahme: $b^n < a$ [$b^n > a$]. Dann ist $\varepsilon := a - b^n > 0$ [$\varepsilon := b^n - a > 0$] und wir finden $\delta \in (0, b)$ mit $\delta < \frac{\varepsilon}{2^n b^{n-1}}$. Unter Verwendung der Vorbemerkung ist dann

$$\begin{aligned} (b+\delta)^n &\leq b^n + \delta 2^n b^{n-1} < b^n + \varepsilon = a \\ [(b-\delta)^n &\geq b^n - \delta 2^n b^{n-1} > b^n - \varepsilon = a], \end{aligned}$$

also $b + \delta \in M$ und somit $b + \delta \leq b$ [also $b - \delta$ OS von M und somit $b - \delta \geq b$]: Widerspruch! ∎

4.11 Starke Induktion

In dem Beweis durch Induktion, so wie wir es bisher haben, hangelt man sich im Induktionschluss (IS) immer um einen Schritt weiter, d.h., man muss im Induktionschluss die Wahrheit von $A(n+1)$ beweisen und darf dabei die Wahrheit von $A(n)$ benutzen[3]. Manchmal benötigt man in dem Induktionschluss (IS) aber nicht nur die Information über $A(n)$ sondern auch über $A(n-1), A(n-2), \ldots, A(1)$.

Beispiel: (1) Anna (A) und Bert (B) spielen folgendes Spiel: Am Tisch sind zwei Haufen mit jeweils 25 Euro Stücken. Anna schlägt Bert vor, daß jeder von ihnen von jeweils einem haufen soviel Geldstücke nehmen kann wie er will (aber nur von einem Haufen). Man muss immer mindestens ein Geldstück nehmen, kann aber auch den ganzen Haufen einstecken. Gewonnen hat, wer das letzte Geldstück vom Tisch nimmt. Zum Beispiel könnte man im ersten Zug einen ganzen Haufen einstecken, aber dann hat der Gegenspieler gewonnen, da er/sie einfach den übriggebliebenen Haufen einsteckt. Da sie nett ist, läßt Anna Bert den ersten Zug machen. Sollte Bert sich darauf einlassen?

Man denkt sich zurecht, daß man hier mit Hilfe der Induktion weiter kommen sollte. Das Problem ist, daß hier die Schrittweite nicht fest (und gleich 1) ist, sondern davon abhängt

[3] Aber auch nur die Wahrheit von $A(n)$!

wieviele Geldstücke in der ersten Runde weggenommen werden. Das sind im Prinzip beliebig viele (maximal 25).

Zunächst einmal der Satz, der hier hilft:

Satz [Starke Induktion]: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte

$$\begin{array}{ll} (IA) & A(1) \\ (IS) & \forall n \in \mathbb{N} : (A(1), A(2), \ldots, A(n) \Rightarrow A(n+1)). \end{array}$$

Dann gilt $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Man beachte, daß hier der Induktionsschluss (IS) *schwächer* ist als bei der "normalen" Induktion, da man hier um $A(n+1)$ zu zeigen nicht nur $A(n)$, sondern *alle* $A(l)$, $1 \leq l \leq n$, voraussetzen darf, d.h., wir können im Induktionsschluss mehr Information benützen als bei er bisherigen Induktion!

Beispiel: (2) Sei a_n durch $a_0 = 1, a_1 = 2$ und für $n \geq 1$ rekursiv durch

$$a_{n+1} := a_n + 2a_{n-1}.$$

Man zeige, daß $a_n = 2^n$ is für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $A(n) =$ "$a_n = 2^n$". Wir wollen zeigen, daß $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir wissen $a_0 = 1 = n^0$ und $a_1 = 2 = 2^1$ also ist $A(n)$ wahr für $n = 0, 1$.

Für den Induktionsschluss *nehmen wir an*, daß für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen $A(n-1)$ und $A(n)$ wahr sind[4], d.h., $a_n = 2^n$ und $a_{n-1} = 2^{n-1}$ und argumentieren dann mittels der gegebenen Rekursionsformel

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} = 2^n + 22^{n-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Also ist dann auch $a_{n+1} = 2^{n+1}$, also $A(n+1)$ wahr, und damit ist per (starker) Induktion ist $A(k)$ wahr für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h., es gilt $a_k = 2^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. ∎

Zurück zum Beispiel (1): Die Gewinnstrategie für Anna ist, die Züge von Bert auf dem jeweils anderen Haufen zu kopieren. Für kleine $n \in \mathbb{N}$ (z.B. $n = 2, 3$) macht man sich schnell klar, daß damit Anna immer gewinnt. Was aber für große $n \in \mathbb{N}$?

Sei $A(n)$ die Aussage[5]

$$A(k) := \text{"Anna gewinnt ein Spiel mit } k \text{ Geldstücken mit obiger Strategie"}.$$

Wir müssen zeigen, daß $A(k)$ wahr ist für alle $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Sicherlich ist $A(1)$ wahr!

[4]Wir können annehmen, daß $A(1), \ldots, A(n-1), A(n)$ wahr sind, wir benötigen aber nur $A(n-1)$ und $A(n)$!

[5]Dies ist eine mathematische Aussage, da $A(n)$ entweder wahr oder falsch ist.

Induktionschluss: Wir nehemen ein festes $n \in \mathbb{N}$ her und können annehmen, daß alle $A(1), \ldots, A(n)$ wahr sind und müssen zeigen, daß daraus folgt, daß $A(n+1)$ wahr ist. Das ist aber relativ einfach: Anna und Bert haben zwei Haufen mit $n+1$ Gelstücken vor sich, Anna lässt Bert vor und Bert sucht sich einen Haufen aus und nimmt j Geldstücke davon weg, wobei $1 \leq j \leq n+1$ ist, da Bert mindestens ein Geldstück wegnehmen muss und höchstens $n+1$ Geldstücke wegnehmen kann. Ist $j = n+1$, so nimmt Anna den anderen Haufen weg und hat gewonnen. Ist $1 \leq j \leq n$, so nimmt Anna von dem anderen Haufen j Gelstücke weg. Nach dieser ersten Runde haben wir also zwei gleich grosse Haufen mit jeweils $n+1-j \leq n$ Geldstücken. Für diese gilt aber die Induktionsvoraussetzung $A(n+1-j)$, nach er Anna dieses Spiel gewinnt. Somit gewinnt Anna auch das Spiel mit zwei Haufen mit jeweils $n+1$ Geldstücken und mittels starker Induktion sind wir sind fertig. ∎

Num zum **Beweis der starken Induktion:** Mittels eines netten Tricks führen wir das direkt auf die 'normale' Induktion zurück:

Sei $C(n) := \{A(1), A(2), \ldots A(n) \text{ sind wahr}\}$. Dann ist, da $A(1)$ wahr ist, auch $C(1)$ wahr. Dies ist der Induktionsanfang.

Für den Induktionsschluss nehemen wir an daß $C(n)$ wahr ist. D.h., alle $A(j)$ mit $j \leq n$ sind wahr. Nach Voraussetzung impliziert dies, daß $A(n+1)$ wahr ist.

Damit sind aber alle $A(j)$ mit $j \leq n+1$ wahr und somit ist $C(n+1)$ wahr. Nach der 'normalen' Induktion (siehe 4.7) ist damit $C(k)$ wahr für alle $k \in \mathbb{N}$. Das bedeuteb aber, daß $A(k)$ wahr ist für alle $k \in \mathbb{N}$, fertig! ∎

4.12 Wohlordnungseigenschaft von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Wir benutzen die starke Induktion um eine sehr nützliche und anscheinen 'offensichtliche' Eigenschaft der natürlichen Zahlen zu beweisen: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element[6]. Denkt man sich die natürlichen Zahlen hintereinander aufgezählt, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, so erscheint dies offensichtlich und man fragt sich zunächst was da zu beweisen sei! Da für uns die natürlichen aber als kleinste induktive Teilmenge der reellen Zahlen definiert sind und dies eine (zunächst) sehr indirekte Beschreibung der natürlichen Zahlen ist, müssen wir hier etwas beweisen...!

Satz: Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ hat eine kleinstes Element, d.h., für eine solche Menge A gibt es ein $a_0 \in A$ mit $a_0 \leq a$ für alle $a \in A$.

Bew: Sei $j \in \mathbb{N}$ und $A(j)$ die Aussage " Jede nichtleere Menge $A \subset \mathbb{N}$ mit $j \in A$ hat ein kleinstes Element". Dann ist der Satz gezeigt, sofern wir nachweisen können, daß $A(j)$ wahr ist für alle $j \in \mathbb{N}$. In der Tat, sei A eine beliebige nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, dann hat sie mindestens ein Element, sagen wir $k \in A$. Wenn $A(k)$ wahr ist muß somit A ein kleinstes Element besitzen.

[6] Ähnlich für $\mathbb{Z}$: Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein kleinstes Element

Nun zum Beweis von $A(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr, denn wenn $A \subset \mathbb{N}$ eine Menge ist mit $1 \in A$, dann hat A offensichtlich ein kleinstes Element, nähmlich 1, da 1 die kleinste[7] natürliche Zahl ist!

Induktionschluss: Wir nehmen an, daß für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen $A(1), \ldots, A(n)$ alle wahr sind. Sei $A \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere Menge mit $n+1 \in A$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Wenn A keine weiteren Element kleiner als $n+1$ enthält, dann ist $n+1$ das kleinste Element von A und somit hat A ein kleinstes Element.

Gibt es ein $1 \leq k \leq n$ mit $k \in A$, so hat, wegen der Aussage $A(k)$, die Menge A wiederum ein kleinstes Element. Damit ist der Induktionschluss bewiesen und somit ist mittels starker Induktion $A(j)$ wahr für alle $j \in \mathbb{N}$. ∎

Bemerkung: Man kann auch ohne starke Induktion argumentieren und stattdessen direkt die Charakterisierung von $\mathbb{N}$ als kleinste induktive Menge verwenden:

Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer und $1 \notin A$ (ansonsten ist 1 bereits das kleinste Element von A und wir sind fertig). Sei ferner $M := \{m \in \mathbb{N} : m < a \text{ für alle } a \in A\}$. Da $1 \notin A$ nach Voraussetzung, ist $1 \in M$. Es kann nun ferner nicht sein, daß für alle $m \in M$ auch $m+1 \in M$ ist. Denn dann währe M eine induktive Teilmenge von N und somit währe $M = \mathbb{N}$ was aber $A = \emptyset$ bedeuten würde!
Somit gibt es ein $m_1 \in M$ mit $m_1 + 1 \notin M$. Ich behaupte, daß $m_1 + 1$ das kleinste Element von A ist (man mache sich dies klar). ∎

Korollar: Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis: Sei $B \subset \mathbb{Z}$ nichtleer und nach unten beschränkt. D.h., es existiert ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $c \leq b$ für alle $b \in B$. Dieses c braucht nicht das gesuchte kleinste Element von B zu sein, da es sicherlich sein kann, daß $c \notin B$.

Wir verschieben die Menge B: Sei $D := \{b - c + 1 : b \in B\}$. Dann ist D erstens nicht leer und zweitens eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, da die Elemente von D ganze Zahlen sind, die alle grösser oder gleich 1 sind! Nach obigem Satz hat D ein kleinstes Element, nennen wir es d. Dann ist $a := d + c$ das kleinste Element von B (klar oder?!). ∎

Diese beiden Tatsachen habe eine sehr nützlich Konsequenz für die reellen und rationalen Zahlen:

[7] Man mache sich dies klar.

4.13 Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Man erinnere sich daran, daß die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ gegeben sind durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Satz: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$.

Bemerkung: Der obige Satz bedeuted, daß es zu jeder beliebigen reellen Zahl x immer rationale Zahlen gibt die beliebig nahe an x liegen. Dafür wählt man $y = x + \varepsilon$ mit ε klein, dann garantiert der obige Satz, dass eine rationale Zahl r_ε existiert mit $|x - r_\varepsilon| < \varepsilon$.

Um den Satz zu beweisen, zeigen wir erst mal ein Lemma, das den Fall untersucht, wenn der Abstand von x und y groß ist (grösser als eins):

Lemma: Im Fall $y - x > 1$ gibt es ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $x < p < y$.

Beweis: Die Menge $D := \{m \in \mathbb{Z} : m > x\}$ ist nach unten beschränkt (nämlich durch x). Also hat sie ein kleinstes Element $p := \min D$. Dann gilt $x < p$, da $p \in D$ ist, und, da p das kleinste Element von D ist, muß auch $p - 1 \leq x$ gelten.

Somit ist $x < p \leq x + 1 < x + (y - x) = y$. ∎

Beweis des Satzes: Wir wählen zunächst $q \in \mathbb{N}$ so, daß $y - x > 1/q$. Dann ist $qy - qx > 1$ und wir finden nach dem Lemma ein $p \in \mathbb{Z}$ mit $qx < p < qy$. Es folgt $x < p/q < y$. ∎

5 Die komplexen Zahlen

5.1 Konstruktion

Auf $\mathbb{R}^2$ erklären wir zwei Verknüpfungen "+" und "$*$" durch

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{und} \\ (x_1, y_1) * (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_2y_1 + x_1y_2).\end{aligned}$$

Man kann nun nachrechnen, dass die Körperaxiome $(A1) - (A9)$ für diese Verknüpfungen gelten (wobei "$*$" die Rolle der Multiplikation übernimmt).

Es gilt $(x_1, 0) * (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$ und man kann das Paar $(x, 0)$ mit der reellen Zahl x identifizieren. Weiter ist $(0, 1) * (0, 1) = (-1, 0)$, dh $(0, 1)$ ist eine "Zahl", deren Quadrat $= -1$ ist. Man setzt nun $i := (0, 1)$ und schreibt $x + iy$ statt (x, y). Es ist dann

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{die Menge der komplexen Zahlen.}$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt x der *Realteil von* z (geschrieben $Re\, z$) und y heißt der *Imaginärteil von* z (geschrieben $Im\, z$). Komplexe Zahlen z mit $Re\, z = 0$ heißen *rein imaginär* und komplexe Zahlen mit $Im\, z = 0$ heißen *reell.*

Man kann mit komplexen Zahlen wie gewohnt rechnen und muss nur $i^2 = -1$ berücksichtigen, etwa

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2) + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2),$$

vergleiche die Definition von "$*$" oben.

5.2 Konjugation und Betrag

Zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die *konjugiert komplexe Zahl.* Es gilt dann $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0$ und $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt Betrag der komplexen Zahl z.

Rechenregeln: Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:
$\overline{(\overline{z})} = z$,
$|\overline{z}| = |z|$,
$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
$Re\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $Im\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
$\max\{|Re\, z|, |Im\, z|\} \leq |z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|$ [denn $\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$],
$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ [denn $|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2$],
$|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung) und $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

[Es ist nämlich

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+w\overline{z} \\ &= |z|^2+|w|^2+\underbrace{z\overline{w}+\overline{(z\overline{w})}}_{=2Re\,(z\overline{w})\leq 2|z\overline{w}|} \\ &\leq |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

woraus die Dreiecksungleichung durch Wurzelziehen folgt.]

Eine komplexe Zahl ist Null genau dann, wenn Real- und Imaginärteil beide Null sind. Ist $x+iy \neq 0$, so ist das multiplikativ Inverse gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

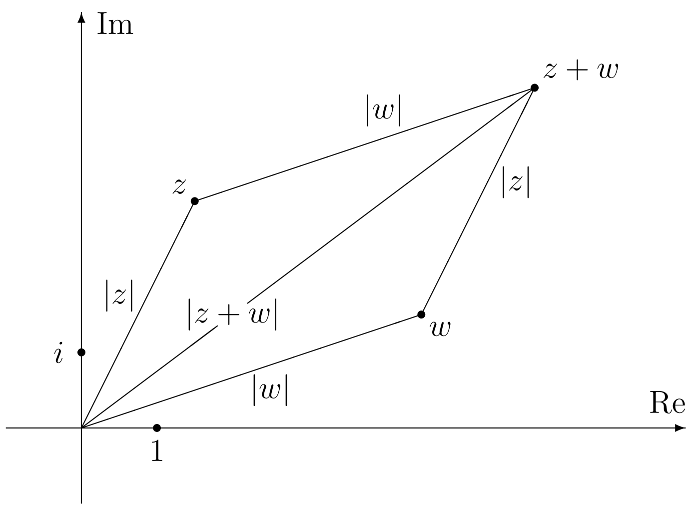
5.3 Zur anschaulichen Vorstellung

Man stellt sich komplexe Zahlen gerne in der Ebene vor, also $x+iy$ als den Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Addition: Addition mit $a+ib$ bedeutet eine Verschiebung.

Multiplikation: Multiplikation mit i bedeutet eine Drehung um 90^o nach links, Multiplikation mit $a+ib$ bedeutet also eine Drehstreckung.

Dreiecksungleichung:



5.4 Polynome

Ein Polynom $p(z)$ mit komplexen Koeffizienten ist ein Ausdruck der Form $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \mathbb{C}$ für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Das Polynom heißt *reell*, wenn alle Koeffizienten a_j reell sind.

Das Polynom heißt *vom Grad* n, falls $a_n \neq 0$ gilt, und zusätzlich *normiert*, falls $a_n = 1$ ist. Insbesondere gilt

$$p(z) \text{ hat den Grad } 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p(z) = a_0 \text{ und } a_0 \neq 0.$$

Das Nullpolynom $p(z) = 0$ hat keinen Grad.

Horner-Schema: Bei der Berechnung von $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ für ein gegebenes $z \in \mathbb{C}$ geht man ökonomischerweise so vor:

$$p(z) = ((\ldots(((a_n \cdot z + a_{n-1}) \cdot z + a_{n-2}) \cdot z + a_{n-3}) \ldots) \cdot z + a_1) \cdot z + a_0.$$

Definition: Ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$ heißt *Nullstelle* des Polynoms p.

Satz: Ist $p(z)$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und ist z_0 Nullstelle von p, so gibt es ein Polynom $q(z)$ vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0).$$

Dabei heißt $z - z_0$ *Linearfaktor.*

Bemerkung: Die *Vielfachheit* (Vfh) der Nullstelle z_0 gibt an, wie oft man $p(z)$ durch den Linearfaktor $z - z_0$ dividieren kann.

Folgerung: Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Folgerung: Ist $p(z)$ normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Eine feste Nullstelle z_0 von $p(z)$ kommt dabei in $z_1, z_2, \ldots, z_n$ so oft vor, wie ihre Vielfachheit angibt.

Beispiele: (1) $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$. Eine Nullstelle ist $z_0 = -1$, dann ist $z - z_0 = z + 1$. Durch Polynomdivision findet man $(z^3 + z^2 + z + 1) : (z + 1) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Also ist $p(z) = (z + 1)(z - i)(z + i)$, die Nullstellen sind -1, i und $-i$ und alle Nullstellen haben die Vielfachheit 1.

(2) $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2$. Einzige Nullstelle ist 1 (mit Vielfachheit 2).

6 Folgen und Konvergenz

6.1 Folgen

Definition: Eine *reelle* [*komplexe*] *Zahlenfolge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ [bzw. $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$].

Wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (a_n) oder auch $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Beispiele: (1) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$.

(2) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

6.2 Konvergenz

Der Begriff der Konvergenz von Folgen ist für die Analysis von kaum zu überschätzender zentraler Bedeutung.

Definition: Sei (a_n) eine Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$]. Wir sagen, dass (a_n) gegen a *konvergiert* und schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \underbrace{n_0}_{=n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet: "die a_n kommen a beliebig nahe" oder "der Abstand $|a_n - a|$ wird beliebig klein".

Die Zahl a heißt dann *Limes* oder *Grenzwert* der Folge (a_n).

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent*, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ [bzw. $a \in \mathbb{C}$] so gibt, dass (a_n) gegen a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Beispiele: (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$: Sei $\varepsilon > 0$. Nach 4.7(4) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für jedes $n \geq n_0$ gilt dann:

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Wir haben $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ nachgewiesen.

Schreibweisen: Statt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ schreibt man auch $\lim a_n = a$, $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ oder $a_n \to a$.

(2) Für jede Zahlenfolge (a_n) und jedes a gilt: $\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim |a_n - a| = 0$. Insbesondere ist für $a = 0$: $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$.

(3) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent: Sei $a \in \mathbb{R}$. Setze $\varepsilon := \begin{cases} 1/2, & \text{falls } a \in \{1, -1\} \\ 1/2 \cdot \min\{|1-a|, |-1-a|\}, & \text{falls } a \notin \{1, -1\} \end{cases}$. Dann gilt $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Folglich konvergiert (a_n) nicht gegen a. Da a beliebig war, ist (a_n) divergent.

(4) Für $a \in \mathbb{C}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \Leftrightarrow |a| < 1$. Denn für $|a| \geq 1$ gilt $|a^n| = |a|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a^n) konvergiert nicht gegen Null. Für $|a| < 1$ sei $\varepsilon > 0$. Nach 4.8(1) finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a|^{n_0} < \varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $0 \leq |a^n| = |a|^n \leq |a|^{n_0} < \varepsilon$. Also ist $\lim_n a^n = 0$.

(5) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (q_n) mit $q_n \to x$ und $q_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn nach 4.13 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein[8] $q_n \in (x-1/n, x+1/n) \cap \mathbb{Q}$. Wegen $|q_n - x| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt dann $q_n \to r$.

Umformulierung: Sei $a \in \mathbb{R}$ [oder $a \in \mathbb{C}$] und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} \quad [\text{bzw.} \quad U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}]$$

die *ε-Umgebung von a in* $\mathbb{R}$ [bzw. *in* $\mathbb{C}$].

Die ε-Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ ist das Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Wir sagen, dass eine Eigenschaft "*für fast alle (ffa) $n \in \mathbb{N}$ gilt*", falls sie für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n > 5$.

Sind eine Folge (a_n) und eine Zahl a gegeben, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gilt } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bei Konvergenzfragen kommt also auf endlich viele Folgenglieder nicht an. Für $p \in \mathbb{Z}$ bezeichnet man auch $(a_n)_{n=p}^\infty$ als Folge.

Bemerkungen: (a) Der Grenzwert einer Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

(b) Eine konvergente Folge (a_n) ist *beschränkt*, dh die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

(c) Ist (z_n) eine komplexe Zahlenfolge, so ist (z_n) genau dann konvergent, wenn die reellen Zahlenfolgen $(Re\, z_n)$ und $(Im\, z_n)$ konvergent sind. Das liegt an der Abschätzung (vgl. 5.2)

$$|Re\, z|, |Im\, z| \leq |z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|.$$

Konvergiert etwa (z_n) gegen $z_0 \in \mathbb{C}$, so zeigt die linke Ungleichung, dass $Re\, z_n \to Re\, z_0$ und $Im\, z_n \to Im\, z_0$. Konvergiert hingegen $(Re\, z_n)$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und $(Im\, z_n)$ gegen $b \in \mathbb{R}$, so zeigt die rechte Ungleichung $z_n \to a + ib$.

Wir beschränken uns deshalb weitgehend auf reelle Zahlenfolgen.

6.3 Grenzwertsätze

Satz: Seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Folgen und $a, b \in \mathbb{R}$.

[8] Man könnte auch $q_n \in (x, x + 1/n) \cap \mathbb{Q}$ oder $q_n \in (x - 1/n, x) \cap \mathbb{Q}$ nehmen

(1) $|a_n - a| \le \alpha_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to 0 \Rightarrow a_n \to a$.

(2) $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$.

(3) $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $a_n \le b_n$ ffa $n \Rightarrow a \le b$.

(4) $a_n \to a$ und $b_n \to a$ und $a_n \le c_n \le b_n$ ffa $n \Rightarrow c_n \to a$.

(5) Gilt $a_n \to a$ und $b_n \to b$, so gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$. Ist $b \ne 0$, so ist $b_n \ne 0$ ffa n und es gilt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

Beweis: (1) ist leicht. Für (2) verwendet man $||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$ (vgl. 4.3(6)) und (1). (3) und (4) hier ohne Beweis.

zu (5): $(a_n + b_n)$ ohne Beweis. Bei $(a_n \cdot b_n)$ verwendet man

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab)| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$$

und die Tatsache, dass die konvergente Folge (a_n) beschränkt ist, dh es gibt $M > 0$ mit $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Aussage über $(\frac{a_n}{b_n})$ muss man nur für $a_n = 1$ zeigen. Sei dazu $b \ne 0$ und $\delta := |b|/2$. Dann ist $\delta > 0$ und wir finden $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \delta$ für alle $n \ge n_0$. Für $n \ge n_0$ gilt dann auch

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \ge |b| - |b - b_n| > 2\delta - \delta = \delta$$

und

$$|1/b_n - 1/b| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} \le \frac{1}{2\delta^2}\,|b_n - b|,$$

woraus die Behauptung folgt. ∎

6.4 Monotone Folgen

Definition: Eine reelle Folge (a_n) heißt

$$\begin{aligned} \textit{monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \le a_{n+1}, \\ \textit{monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \ge a_{n+1}, \\ \textit{streng monoton wachsend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}, \\ \textit{streng monoton fallend}, &\quad \text{falls} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}. \end{aligned}$$

Satz: Ist eine monoton wachsende [fallende] reelle Folge (a_n) beschränkt, so konvergiert sie, und zwar gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ [$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$].

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und $s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} > s - \varepsilon$. Für $n \ge n_0$ gilt dann $s - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le s$, also auch $|a_n - s| < \varepsilon$.

Beispiele (1) $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ und $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[p]{a_n} \to \sqrt[p]{a}$.
Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass für alle $y > x \ge 0$ gilt $\sqrt[p]{y} - \sqrt[p]{x} \le \sqrt[p]{y - x}$. [Es ist

nämlich nach dem binomischen Satz $(\sqrt[p]{y-x} + \sqrt[p]{x})^p = y - x + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} + x \geq y$.]

Wir erhalten somit $|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \sqrt[p]{|a_n - a|}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $b_n := |a_n - a|$, so gilt $b_n \to 0$ und es reicht zu zeigen, dass $\sqrt[p]{b_n} \to 0$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $b_n < \varepsilon^p$ für alle $n \geq n_0$. Es gilt dann $0 \leq \sqrt[p]{b_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

(2) $\sqrt[n]{n} \to 1$: Setze $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann ist $a_n \geq 0$ für alle n, und für $n \geq 2$ gilt:

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

also $0 \leq a_n \leq \sqrt{2}/\sqrt{n-1}$. Es folgt $a_n \to 0$.

Für $c > 0$ gilt $\sqrt[n]{c} \to 1$: Für $c \geq 1$ ist $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$ ffa n, und für $c \in (0, 1)$ ist $1/\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{c} \leq 1$ ffa n. Wende nun 6.3(4) an.

(3) Konvergiert die Folge (a_n) so gilt $a_{n+1} - a_n \to 0$. Es gilt aber auch z.B. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$. Denn es gilt auch $a_{n+1} \to 0$, und $a_{n+1} - a_n \to 0$ folgt aus Satz 6.3(5).
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

woraus $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$ folgt, obwohl $(\sqrt{n})$ nicht konvergiert.

(4) Sei $z \in \mathbb{C}$ und $s_n := \sum_{k=0}^{n} z^k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (s_n) konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist. In diesem Falle gilt $\lim s_n = (1-z)^{-1}$. Für $|z| \geq 1$ ist nämlich $|s_{n+1} - s_n| = |z|^{n+1} \geq 1$, und (s_n) konvergiert nicht. Für $|z| < 1$ ist $s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ nach Übungsaufgabe und also $s_n \to (1-z)^{-1}$ nach 6.2(4).

6.5 Teilfolgen

Definition: Ist (a_n) eine Folge und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $k(n) < k(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (dh $(k(n))$ ist eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen), so heißt die Folge $(a_{k(n)})$ *Teilfolge (TF)* von (a_n).

Eine Zahl b heißt *Häufungswert (HW) der Folge* (a_n), falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen b konvergiert.

Beispiel: $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ ist Teilfolge von (a_n), hier ist $k(n) = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(a_3, a_1, a_7, a_5, \ldots)$ ist hingegen keine Teilfolge von (a_n).

Bemerkung: Eine Zahl b ist HW der Folge (a_n) genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $a_k \in U_\varepsilon(b)$ ist für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Beispiele: (1) Gilt $a_n \to a$, so konvergiert jede Teilfolge von (a_n) gegen a, dh a ist einziger HW von (a_n).

(2) Die Folge $((-1)^n)$ hat genau die HWe 1 und -1: Wegen $a_{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} \to -1$ sind 1 und -1 HWe. Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ und $\varepsilon := \min\{|1-b|, |-1-b|\}/2$, so ist $\varepsilon > 0$ und in $U_\varepsilon(b)$ liegen keine Folgenglieder. Somit ist b kein HW von (a_n).

Satz (Bolzano-Weierstraß): Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge, dh jede beschränkte Zahlenfolge hat einen Häufungswert.

Bemerkung: Der Satz gilt für reelle und komplexe Zahlenfolgen.

6.6 Rechnen mit ∞

Definition: Sei (a_n) eine reelle Folge.

$$\begin{aligned} a_n \to \infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > K, \\ a_n \to -\infty \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n < K. \end{aligned}$$

Achtung: Man redet hier nicht von "Konvergenz", denn $\pm\infty \notin \mathbb{R}$, dh ∞ und $-\infty$ sind keine **Zahlen**. Man sagt jedoch etwa "die Folge a_n geht gegen unendlich" und schreibt auch $\lim_n a_n = \infty$.

Bemerkung: (a) Gilt $a_n \to \pm\infty$, so folgt $|a_n| \to \infty$ und $1/a_n \to 0$. [Der erste Teil ist klar. Es gelte $|a_n| \to \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 mit $\forall n \geq n_0 : |a_n| > 1/\varepsilon$. Es gilt dann $\forall n \geq n_0 : |1/a_n| < \varepsilon$.]

(b) Ist die reelle Folge (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, so gibt es eine Teilfolge $(a_{k(n)})$ von (a_n) mit $a_{k(n)} \to \infty$ [bzw. mit $a_{k(n)} \to -\infty$].

(c) Für jede monoton wachsende [monoton fallende] Folge (a_n) gibt es $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [bzw. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$] mit $a_n \to a$.

Konventionen: Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $-\infty < a < \infty$.
Man setzt für $a \in \mathbb{R}$: $a+\infty = \infty$, $a-\infty = -\infty$, sowie für $a > 0$: $a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$ und für $a < 0$: $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$.
Außerdem setzt man $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$ und $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$.

Achtung: Die Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ und $\infty - \infty$ sind **nicht definiert!**

Regeln: Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, wobei $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n + b_n \to a + b, \quad &\text{falls} \quad a + b \text{ definiert ist,} \\ a_n \cdot b_n \to a \cdot b, \quad &\text{falls} \quad a \cdot b \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Definition: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ eine Menge.

$$\begin{aligned} \sup M = \infty \quad &:\Leftrightarrow \quad M \text{ ist nicht nach oben beschränkt,} \\ \inf M = -\infty \quad &:\Leftrightarrow \quad M \text{ ist nicht nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

Bemerkung: Manchmal findet man auch $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$.

Bemerkung: Man hat also für $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sup M = \infty &\Leftrightarrow \forall K > 0 \, \exists x \in M : x > K, \\ \inf M = -\infty &\Leftrightarrow \forall K > 0 \, \exists x \in M : x < -K. \end{aligned}$$

Beispiele: $\sup \mathbb{N} = \infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$.

6.7 Limes superior und Limes inferior

Definition: Sei (a_n) eine reelle Folge. Ist (a_n) nach oben beschränkt, so ist die durch $b_n := \sup\{a_k : k \geq n\}$ definierte Folge (b_n) monoton fallend und wir definieren

$$\limsup_{n \to \infty} a_n := \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \sup\{a_k : k \geq n\}.$$

Ist (a_n) nach unten beschränkt, so ist die durch $c_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$ definierte Folge (c_n) monoton wachsend und wir definieren

$$\liminf_{n \to \infty} a_n := \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

Ist (a_n) nicht nach oben [unten] beschränkt, setzen wir $\limsup_{n \to \infty} a_n := \infty$ [bzw. $\liminf_{n \to \infty} a_n := -\infty$].

Schreib- und Sprechweisen: Man schreibt auch kurz $\limsup_n a_n$ oder $\limsup a_n$, sowie $\overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$, $\overline{\lim}_n a_n$, $\overline{\lim} a_n$ und spricht vom "oberen Limes", entsprechend für $\liminf$ mit $\underline{\lim}$ ("unterer Limes").

Bemerkung: (a) Es gibt stets Teilfolgen $(a_{k(n)})$ und $(a_{l(n)})$ von (a_n) mit

$$a_{k(n)} \to \limsup a_n \qquad a_{l(n)} \to \liminf a_n.$$

(b) Ist (a_n) beschränkt, so ist $\limsup a_n$ der **größte** und $\liminf a_n$ ist der **kleinste** HW von (a_n).

Beispiele: (1) Für $a_n := (-n)^n$ ist $\limsup a_n = \infty$ und $\liminf a_n = -\infty$. Die Folge hat keine HWe.

(2) Für $a_n := (-1)^n$ ist $\limsup a_n = 1$ und $\liminf a_n = -1$.

(3) Ist $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim a_n = 0$ genau dann, wenn $\limsup a_n = 0$ ist.

(4) Gilt $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, so ist $\limsup a_n = \liminf a_n = a$.

7 Reihen

7.1 Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $s_N := \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ für jedes $N \in \mathbb{N}$. Die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ heißt (*unendliche*) *Reihe* und wird mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet. Die Zahl s_N heißt N*-te Partialsumme* oder N*-te Teilsumme* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt *konvergent* [*divergent*], falls die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert [bzw. divergiert].

Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so heißt $\lim_{N\to\infty} s_N$ der *Reihenwert* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und wird ebenfalls mit $\sum_{n=1}^\infty a_n$ bezeichnet.

Bemerkung: (a) Die Folge (a_n) kann hier reell oder komplex sein. Ist (a_n) komplex, so heißt die Reihe $\sum_{n=1}^\infty Re\, a_n$ *Realteil* der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty Im\, a_n$ heißt *Imaginärteil* von $\sum_{n=1}^\infty a_n$.
Eine komplexe Reihe konvergiert genau dann, wenn ihr Realteil **und** ihr Imaginärteil **beide** konvergieren. In diesem Fall ist

$$Re\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right) = \sum_{n=1}^\infty Re\, a_n \text{ und } Im\left(\sum_{n=1}^\infty a_n\right) = \sum_{n=1}^\infty Im\, a_n,$$

vgl. mit 6.2.

(b) Ist $p \in \mathbb{Z}$, so verfährt man für Folgen $(a_n)_{n=p}^\infty$ entsprechend, indem man $s_N := \sum_{n=p}^\infty$ für $N \geq p$ setzt und $(s_N)_{N=p}^\infty$ betrachtet. Ein wichtiger Fall ist hierbei $p = 0$.

Beispiele: (1) Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^\infty z^n$, wobei $z \in \mathbb{C}$, konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. Für $|z| < 1$ ist $\sum_{n=0}^\infty z^n = (1-z)^{-1}$ (vgl. 6.4(4)).

(2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, also ist für jedes $N \in \mathbb{N}$:

$$s_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \ (N \to \infty).$$

Somit ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ konvergent und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(3) Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$s_{2N} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N}}_{=s_N} + \underbrace{\frac{1}{N+1}}_{\geq \frac{1}{2N}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2N}}_{\geq \frac{1}{2N}} \geq s_N + N\frac{1}{2N} = s_N + \frac{1}{2}.$$

Also ist (s_N) divergent, denn $s_N \to s \in \mathbb{R}$ würde $s_{2N} - s_N \to s - s = 0$ implizieren im Widerspruch zu $s_{2N} - s_N \geq 1/2$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

7.2 Satz: Seien (a_n) und (b_n) Folgen und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$, $N \in \mathbb{N}$.

(1) **Monotoniekriterium:** Sind alle $a_n \geq 0$ und ist $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

(2) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und $p \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=p+1}^\infty a_n$ und es gilt

$$\sum_{n=p+1}^\infty a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^p a_n.$$

(3) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und $r_N := \sum_{n=N+1}^\infty a_n$ für jedes $N \in \mathbb{N}$, so gilt $r_N \to 0$ $(N \to \infty)$.

(4) Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent, so folgt $a_n \to 0$.

(5) Sind $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$), so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n)$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^\infty (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^\infty a_n + \beta \sum_{n=1}^\infty b_n.$$

Beweis: (1) folgt aus 6.4, angewandt auf die monton wachsende Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$.
(2) Setzt man $\sigma_N := \sum_{n=p+1}^N a_n$ für $N \geq p+1$, so ist $\sigma_N = s_N - s_p \to \sum_{n=1}^\infty a_n - s_p$ $(N \to \infty)$.
(3) Wegen (2) gilt $r_N = \sum_{n=1}^\infty a_n - s_N \to \sum_{n=1}^\infty a_n - \sum_{n=1}^\infty a_n = 0$.
(4) Es ist $a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ wegen 6.6(1).
(5) folgt aus 6.3(5).

7.3 Absolute Konvergenz

Definition: Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergiert (dh also, falls die Reihe über die Absolutbeträge der a_n konvergiert).

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Setzt man $a_n := (-1)^n/n$ und $s_N := a_1 + \ldots + a_N$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$, so stellt man fest, dass $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist mit US $s_1 = -1$ und $(s_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist mit OS $s_2 = -1/2$. Nach 6.4 konvergieren beide Folgen, und zwar wegen $s_{2m} - s_{2m-1} = a_m \to 0$ gegen denselben Grenzwert. Somit konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}$.

Satz: Ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und es gilt

$$|\sum_{n=1}^\infty a_n| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n|$$

(Dreiecksungleichung für Reihen). (Satz hier ohne Beweis.)

7.4 Leibnizkriterium für alternierende Reihen: Sei (b_n) eine **monoton fallende** Folge mit $b_n \to 0$. Setzt man $a_n := (-1)^n b_n$, $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Beweis wie im Beispiel mit $b_n = 1/n$.

Bemerkung: Beachte, dass aus den Voraussetzungen folgt: $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Monotonie ist hier wichtig! Setzt man nur voraus, dass $b_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n \to 0$, so ist die Aussage i.a. falsch (Beispiele in den Übungen).

7.5 Majoranten- und Minorantenkriterium: Seien (a_n) und (b_n) Folgen.

(1) Gilt $|a_n| \leq b_n$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent.

(2) Gilt $a_n \geq b_n \geq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent.

Beweis: Für (1) verwende 7.2(1). (2) folgt aus (1).

Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$ konvergiert, denn $0 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert nach 7.1(2). Somit konvegiert auch $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

7.6 Wurzelkriterium: Sei (a_n) eine Folge und $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

(1) Ist $\alpha < 1$, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent.

(2) Ist $\alpha > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bemerkung: Ist $\alpha = 1$, so liefert das Wurzelkriterium keine Entscheidung. Denn $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ ist divergent und $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n} = \lim 1/\sqrt[n]{n} = 1$, und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ist konvergent mit $\alpha = \limsup \sqrt[n]{1/n^2} = \lim 1/(\sqrt[n]{n})^2 = 1$.

Beweis: Ist $\alpha < 1$, so wählen wir $x \in (\alpha, 1)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq x$ ffa $n \in \mathbb{N}$, also $|a_n| \leq x^n$ ffa $n \in \mathbb{N}$. Wegen $x \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^\infty x^n$, und die Behauptung folgt aus 7.5(1).

Ist $\alpha > 1$, so wählen wir $y \in (1, \alpha)$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq y \geq 1$ für unendlich viele n, also $|a_n| \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $a_n \not\to 0$, und nach 7.2(4) ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent.

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty n^p x^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit dem Wurzelkriterium. Hier ist $a_n = n^p x^n$ und

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (\sqrt[n]{n})^p |x| \to |x| \ (n \to \infty).$$

Also ist $\sum_{n=1}^\infty n^p x^n$ für $|x| < 1$ absolut konvergent und für $|x| > 1$ divergent. Für $|x| = 1$ gilt $|a_n| = n^p \to \infty$ und $\sum_{n=1}^\infty n^p x^n$ ist nach 7.2(4) divergent.

7.7 Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ ffa $n \in \mathbb{N}$ und $c_n := |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ für n mit $a_n \neq 0$.

(1) Ist $c_n \geq 1$ ffa $n \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent.

(2) Ist $\limsup c_n < 1$, so ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent.
Ist $\liminf c_n > 1$, so divergiert $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Bemerkung: Konvergiert (c_n) gegen α, so ist für $\alpha < 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolut konvergent und für $\alpha > 1$ ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergent. Im Falle $\alpha = 1$ ist **keine** allgemeine Aussage möglich.

Beweis: (1) Es sei $c_n \geq 1$ für $n \geq n_0$. Dann ist $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_{n_0}| > 0$ für alle $n \geq n_0$, dh $|a_n| \not\to 0$. Nach 7.2(4) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\alpha := \limsup c_n < 1$, so wähle $x \in (\alpha, 1)$. Es gilt dann $c_n \leq x$ ffa $n \in \mathbb{N}$, dh wir finden n_0 mit $c_n \leq x$ für alle $n \geq n_0$. Es folgt $|a_n| \leq x|a_{n-1}| \leq \ldots \leq x^{n-n_0}|a_{n_0}| = x^n(|a_{n_0}|/x^{n_0})$. Wegen $x \in (0,1)$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, und nach 7.5(1) ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist $\beta := \liminf c_n > 1$, so folgt $c_n \geq 1$ ffa n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert nach (1).

7.8 Die Exponentialreihe

Wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe konvergiert für $z = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$. Setzt man für $z \neq 0$: $a_n := z^n/n!$, so gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut. Insbesondere ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

7.9 Umordnungen

Definition: Sei (a_n) eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Setze $b_n := a_{\varphi(n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt (b_n) [bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$] ein *Umordnung* von (a_n) [bzw. von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$].

Beispiel: $(a_2, a_4, a_1, a_3, a_6, a_8, a_5, a_7, \ldots)$ ist eine Umordnung von (a_n) (aber **keine** Teilfolge von (a_n)!).

Satz (ohne Beweis): Sei (b_n) eine Umordnung von (a_n).

(1) Ist (a_n) konvergent, so konvergiert auch (b_n) und $\lim a_n = \lim b_n$.

(2) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut** konvergent, so ist auch $\sum_{N=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Riemannscher Umordnungssatz (ohne Beweis): Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Dann gibt es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$. Es gibt auch divergente Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiele hierzu gibt es in den Übungsaufgaben.

7.10 Das Cauchyprodukt

Definition: Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen. Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Satz: Sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **absolut konvergent**, so ist auch ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beispiel: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolut. Das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selber ist

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Nach dem Satz konvergiert diese Reihe absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7.11 Die Exponentialfunktion

Da die Exponentialreihe nach 7.8 für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir durch

$$E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Funktion definieren, E heißt die *komplexe Exponentialfunktion.*

(0) Es gilt $E(0) = 1$.

(1) Für alle $z, w \in \mathbb{R}$ gilt $E(z)E(w) = E(z + w)$.

[Cauchyprodukt für $a_n = z^n/n!$ und $b_n = w^n/n!$; man hat dann

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \frac{(z+w)^n}{n!}$$

nach dem binomischen Satz, und 7.10 gibt die Behauptung.]

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$, sowie $E(z)^n = E(nz)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

[Es ist $1 = E(0) = E(z + (-z)) = E(z)E(-z)$, woraus $E(z) \neq 0$ und $E(z)^{-1} = E(-z)$ folgt. Der Rest folgt aus (1).]

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $E(x) \in \mathbb{R}$ und $E(x) > 0$; für $x > 0$ gilt $E(x) > 1$.

[Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $E(x) \in \mathbb{R}$ klar und für $x > 0$ gilt

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0} \geq 1 + x > 1.$$

Also ist für $x < 0$ nach (2): $E(x) = E(-x)^{-1} \in (0,1)$.]

(4) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Rightarrow E(x) < E(y)$.

[Ist $x < y$, so gilt nach (1) und (3):

$$E(y) = E(\underbrace{y-x}_{>0})\underbrace{E(x)}_{>0} > E(x).]$$

(5) Es ist $\sup\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = \infty$ und $\inf\{E(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0$.

[Für jedes $K > 0$ gilt $E(K) \geq 1 + K > K$ (woraus die erste Behauptung folgt) und also auch $0 \leq E(-K) = E(K)^{-1} < 1/K$, woraus die zweite Behauptung folgt.]

(6) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$.

[Dies folgt aus der Definition, sowie der Tatsache, dass $w_n \to w_0$ für eine komplexe Folge (w_n) impliziert: $\overline{w_n} \to \overline{w}$.]

(7) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $E(x + iy) = E(x)E(iy)$ und $|E(iy)| = 1$.

[Die erste Gleichung folgt aus (1). Mittels (6), (1) und (0) gilt für $y \in \mathbb{R}$:

$$|E(iy)| = \sqrt{E(iy)\overline{E(iy)}} = \sqrt{E(iy)E(-iy)} = \sqrt{E(iy - iy)} = 1.]$$

(8) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt[n]{E(x)} = E(\frac{x}{n})$.

[Es gilt nach (2): $E(\frac{x}{n})^n = E(n\frac{x}{n}) = E(x)$.]

(9) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|E(z)| = E(Re\, z)$.

[Nach (6), (1) und (8) ist:

$$|E(z)| = \sqrt{E(z)\overline{E(z)}} = \sqrt{E(z + \overline{z})} = \sqrt{E(2Re\, z)} = E(Re\, z).]$$

Definition: Man setzt $e := E(1)$ *Eulersche Zahl.* Es ist also

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \approx 2.718.$$

Bemerkung: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(1 + \frac{x}{n})^n \to E(x)$ $(n \to \infty)$. Insbesondere ist $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. (ohne Beweis.)

Bemerkung und Definition: Wegen (2) und (8) gilt $e^n = E(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $\sqrt[n]{e} = E(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man schreibt deshalb auch $e^z := E(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$. Eine andere Bezeichnung ist $\exp(z) := E(z)$.

Wir zeigen noch die folgenden **Abschätzungen**:

(10) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt $|E(h) - 1| \leq |h|E(|h|)$.

(11) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $|\frac{E(h)-1}{h} - 1| \leq |h|E(|h|)$.

Beweis: Es ist $E(h) = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$. Also

$$|E(h) - 1| = |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!}| \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{(n-1)!} = |h|E(|h|),$$

womit (10) gezeigt ist. Für $h \neq 0$ haben wir

$$|\frac{E(h) - 1}{h} - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^n}{(n+1)!} \leq |h| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}}{n!} \leq |h|E(|h|).$$

7.12 Sinus und Cosinus

Definition: Wir definieren die Funktionen $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

(0) Es ist $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$. [folgt aus 7.11(0)]

(1) **Reihendarstellungen:** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots, \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots. \end{aligned}$$

Das folgt aus

$$\begin{aligned} E(iz) &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \dots \\ E(-iz) &= 1 - iz - \frac{z^2}{2} + i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \dots. \end{aligned}$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x \in \mathbb{R}$ und $\cos x \in \mathbb{R}$, sowie

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{und} \qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1.$$

[Aus (1) folgt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$Re\, e^{ix} = \frac{1}{2}(e^{ix} + \overline{e^{ix}}) = \cos x \quad \text{und} \quad Im\, e^{ix} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - \overline{e^{ix}}) = \sin x.$$

Somit $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = |e^{ix}|^2 = 1$ nach 7.11(7).]

(3) **Additionstheoreme:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w,\\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w.\end{aligned}$$

Das folgt sofort aus 7.11(1).

Wir zeigen noch die folgenden **Abschätzungen**:

(4) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\sin h| \leq |h| E(|h|)$.

(5) Für alle $h \in \mathbb{C}$ gilt: $|\cos h - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(6) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\sin h}{h} - 1| \leq |h| E(|h|)$.

(7) Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt: $|\frac{\cos h - 1}{h}| \leq |h| E(|h|)$.

Beweis: Die Abschätzungen folgen aus (10) und (11), wenn man beachtet:

$$\begin{aligned}\sin h &= \frac{1}{2i}(E(ih) - 1 - (E(-ih) - 1)),\\ \cos h - 1 &= \frac{1}{2}(E(ih) - 1 + (E(-ih) - 1)),\\ \frac{\sin h}{h} - 1 &= \frac{E(ih) - E(-ih)}{2ih} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 + \frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right),\\ \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{i}{2}\frac{E(ih) - 1 + E(-ih) - 1}{ih} = \frac{i}{2}\left(\frac{E(ih) - 1}{ih} - 1 - \left(\frac{E(-ih) - 1}{-ih} - 1\right)\right).\end{aligned}$$

7.13 Potenzreihen

Definition: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine *Potenzreihe (PR) um* z_0 hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen *Koeffizienten* der Potenzreihe und z_0 heißt *Entwicklungspunkt*.

Wir nennen eine Potenzreihe *reell*, falls z_0 und alle a_n reell sind.

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert eine gegebene Potenzreihe? Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert eine reelle Potenzreihe?

Beispiele: Die Potenzreihen für exp, sin und cos konvergieren für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Die geometrische Reihe konvergiert für $|z| < 1$.
Alle diese Reihen haben als Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Bemerkung: Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergiert für $z = z_0$, dh im Entwicklungspunkt.

7.14 Der Konvergenzradius

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Setzt man

$$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

mit den Konventionen $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$, so gilt:

(a) Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$.

(b) Die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

Die Zahl R heißt *Konvergenzradius* (KR) der Potenzreihe.

Bemerkung: Im Falle $R = 0$ konvergiert die Potenzreihe also nur für $z = z_0$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Im Fall $R = \infty$ ist die Potenzreihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Bemerkung: Im Fall $R \in (0, \infty)$ lässt sich für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$ keine allgemeine Aussage treffen:

(a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, sie divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat Konvergenzradius $R = 1$, für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist sie absolut konvergent.

Folgerung: (a) Konvergiert die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ und für den Konvergenzradius R gilt $R \geq |z_1 - z_0|$.

(b) Divergiert die Potenzreihe für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, so divergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ und für den Konvergenzradius R gilt $R \leq |z_1 - z_0|$.

Beispiele: (1) Die Potenzreihen für exp, sin, cos haben jeweils Konvergenzradius ∞.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$, ebenso die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$ mit $p \in \mathbb{N}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat Konvergenzradius $R = 0$.

Beweis des Satzes: Wir haben für $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})|z - z_0|,$$

und die Behauptungen des Satzes folgen aus dem Wurzelkriterium 7.6.

7.15 Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \infty$, so ist der Konvergenzradius $R = 1/\alpha$.

[Das folgt aus dem Quotientenkriterium (Bemerkung in 7.7).]

Bemerkung: Hier erlauben $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ i.a. keine Entscheidung!

Beispiel: $a_n = (\frac{2+(-1)^n}{3})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & , n \text{ ungerade,} \\ 1 & , n \text{ gerade.} \end{cases} \quad \text{und} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} 3^n & , n \text{ ungerade,} \\ 3^{-n-1} & , n \text{ gerade.} \end{cases},$$

also $\limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \infty$ und $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, aber der Konvergenzradius ist $R = 1$.

8 Stetigkeit

8.1 Definition:

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt *stetig in* $x_0 \in D$, falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

Die Funktion f heißt *stetig in/auf* D, falls sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist.

8.2 Beispiele:

(1) exp, sin und cos sind stetig in 0.

[Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to 0$. Wir finden $M \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach 7.11(10), 7.12(4) und 7.12(5) gilt

$$\begin{aligned} |E(x_n) - \underbrace{E(0)}_{=1}| &\leq |x_n|E(|x_n|) \leq E(M)\,|x_n| \to 0, \\ |\sin x_n - \underbrace{\sin 0}_{=0}| &\leq |x_n|E(|x_n|) \to 0, \\ |\cos x_n - \underbrace{\cos 0}_{=1}| &\leq |x_n|E(|x_n|) \to 0.] \end{aligned}$$

(2) exp, sin und cos sind stetig auf $\mathbb{R}$.

[Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$. Dann gilt nach 7.11, 7.12 und (1):

$$\begin{aligned} |E(x_n) - E(x_0)| &= E(x_0)|E(\underbrace{x_n - x_0}_{\to 0}) - 1| \to 0, \\ |\sin(x_n) - \sin(x_0)| &= |\sin(x_n - x_0)\cos x_0 + \cos(x_n - x_0)\sin x_0 - \sin x_0| \\ &\leq |\cos x_0|\underbrace{|\sin(x_n - x_0)|}_{\to 0} + |\sin x_0|\underbrace{|\cos(x_n - x_0) - 1|}_{\to 0} \to 0, \\ |\cos(x_n) - \cos(x_0)| &= |\cos(x_n - x_0)\cos x_0 - \sin(x_n - x_0)\sin x_0 - \cos x_0| \\ &\leq |\cos x_0||\cos(x_n - x_0) - 1| + |\sin x_0||\sin(x_n - x_0)| \to 0.] \end{aligned}$$

(3) Ist $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom, so ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ stetig. Dies folgt aus 6.3, genauso wie der folgende Satz.

8.3 Satz:

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ stetig sind. Dann sind auch $f+g, f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Bemerkung: Ist g stetig in x_0 und $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \{x \in D : g(x) = 0\} = \emptyset$.

[Andernfalls findet man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $g(x_n) = 0$ und $x_n \in (x_0 - 1/n, x_0 + 1/n)$, dh mit $|x_n - x_0| < 1/n$. Wir haben also $x_n \to x_0$ und wegen der Stetigkeit von g in x_0 auch $0 = g(x_n) \to g(x_0) \neq 0$ Widerspruch!]

Beweis des Satzes: Dies folgt unmittelbar aus unserer Definition der Stetigkeit von Funktionen via Konvergenz von Folgen und der Grenzwertsätze fuer Folgen! ∎

Beispiele: Sind p, q reelle Polynome mit $q \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{p}{q} : \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ stetig.

8.4 Definition (Grenzwerte bei Funktionen):

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ derart, dass eine Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ existiert. Wir schreiben

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta,$$

falls für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ gilt: $f(x_n) \to \beta$.

Beispiele: $\lim_{x\to 0} E(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} E(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{E(x)-1}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$. [Die Aussagen folgen aus 7.11 und 7.12.]

Bemerkung: (1) β ist in dieser Definition eindeutig bestimmt (das liegt daran, dass es *mindestens eine* Folge (x_n) in $D \setminus \{\alpha\}$ mit $x_n \to \alpha$ gibt).

(2) Der eventuell vorhandene Funktionswert $f(\alpha)$ spielt **keine** Rolle.

(3) Ist $\alpha = x_0 \in \mathbb{R}$ und gibt es eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, so heißt x_0 ein *Häufungspunkt von D*. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jede Menge $D \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$x_0 \text{ ist Häufungspunkt von } D \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \, U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Beispiele: 0 ist ein Häufungspunkt von $(0, 1)$ oder von $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, aber 0 ist kein Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$.

Satz: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn für jeden Häufungspunkt x_0 von D gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bemerkung: Ist x_0 kein Häufungspunkt von D, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ gilt, dh dass $U_\varepsilon(x_0) \cap D = \{x_0\}$ ist. Ein solches x_0 heißt *isolierter Punkt von D*. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in jedem isolierten Punkt von D stetig.

Beispiel: Sei $D = [0, 1] \cup \{2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & , x \in [0, 1) \\ 1/2 & , x = 1 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$.

(i) $x_0 \in [0,1)$: Ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$, so gilt $x_n \in [0,1)$ ffa n, und somit $f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$. Also ist f stetig in x_0.

(ii) $x_0 = 1$: Ist (x_n) eine Folge in $D \setminus \{1\}$ mit $x_n \to 1$, so gilt ebenfalls $x_n \in [0,1)$ ffa n, also $f(x_n) = x_n^2 \to 1$. Somit gilt $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq \frac{1}{2} = f(1)$ und f ist in $x_0 = 1$ nicht stetig.

(iii) $x_0 = 2$: Ist (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to 2$, so gilt $x_n = 2$ ffa n, also $f(x_n) = f(2) = 0$ ffa n und $f(x_n) \to 0 = f(2)$. Also ist f in $x_0 = 2$ stetig (beachte, dass 2 ein isolierter Punkt von D ist).

8.5 Satz (ε-δ-Kriterium):

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann ist f in x_0 stetig genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Beweis: Es gelte "ε-δ". Sei (x_n) eine Folge in D mit $x_n \to x_0$ und $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wegen $x_n \to x_0$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$ ffa n. Es folgt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ ffa n. Damit ist $f(x_n) \to f(x_0)$ gezeigt.

Wenn "ε-δ" nicht gilt, finden wir ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < 1/n [= \delta]$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Es gilt dann $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Somit ist f in x_0 nicht stetig.

8.6 Satz (Komposition stetiger Funktionen):

Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es sei $f(D_1) \subset D_2$, $x_0 \in D_1$ und $y_0 := f(x_0)$. Ist f stetig in x_0 und g stetig in y_0, so ist $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in D_1 mit $x_n \to x_0$. Da f in x_0 stetig ist, folgt $y_n := f(x_n) \to f(x_0) = y_0$. Da g stetig in y_0 ist, folgt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0).$$

Also ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beispiel: Sei $p \in \mathbb{N}$. Die Funktion $g_p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ ist stetig (nach 6.5(1)). Da $f : x \mapsto x^2$ stetig ist, ist auch $x \mapsto g_2 \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ auf $\mathbb{R}$ stetig.

8.7 Satz (Stetigkeit von Potenzreihen):

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius R, wobei $0 < R \leq \infty$. Dann ist die Funktion

$$f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

auf $D := (x_0 - R, x_0 + R)$ stetig. (hier ohne Beweis!)

8.8 Zwischenwertsatz (ZWS):

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei y_0 *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ (dh $y_0 \in [f(a), f(b)]$, falls $f(a) \leq f(b)$, und $y_0 \in [f(b), f(a)]$, falls $f(a) > f(b)$). Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Folgerung: Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.

Bemerkung: Eine Teilmenge $J \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $c, d \in J$ mit $c < d$ gilt: $[c, d] \subset J$.

Beweis der Folgerung: Setze $J := f(I)$. Seien $c, d \in J$ mit $c < d$. Sei $y_0 \in [c, d]$. Wir finden $a, b \in I$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein x_0 zwischen a und b mit $f(x_0) = y_0$. Somit ist $y_0 \in f(I) = J$.

Beispiel: Ist p ein normiertes Polynom von ungeradem Grad m, so gilt $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

[Wegen des Zwischenwertsatzes reicht es zu zeigen, dass $p(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und dass $p(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Die Behauptungen sind klar für $m = 1$. Sei also $m \geq 3$ und $p(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Für $x \geq 1 + |a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ gilt dann

$$\begin{aligned}
p(x) &\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-2} - \ldots - |a_1|x - |a_0| \\
&\geq x^m - |a_{m-1}|x^{m-1} - |a_{m-2}|x^{m-1} - \ldots - |a_1|x^{m-1} - |a_0|x^{m-1} \\
&\geq x^{m-1} \underbrace{(x - (|a_{m-1}| + |a_{m-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|))}_{\geq 1} \\
&\geq x^{m-1} \to \infty \quad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Die Aussage für $x \to -\infty$ zeigt man ähnlich.

8.9 Einseitige Grenzwerte

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D \cap (x_0, \infty)$ [bzw. von $D \cap (-\infty, x_0)$]. Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \quad [\text{bzw. } \lim_{x \to x_0-} f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}],$$

falls für jede Folge (x_n) in $D \cap (x_0, \infty)$ [bzw. in $D \cap (-\infty, x_0)$] mit $x_n \to x_0$ gilt: $f(x_n) \to \beta$.

Im Falle der Existenz heißt $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ *rechtsseitiger Grenzwert* und $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ heißt *linksseitiger Grenzwert* von f in x_0.

Schreibweisen: $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ statt $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ statt $\lim_{x \to x_0-} f(x)$.

Beispiel: Sei $D = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1) \end{cases}$. Dann gilt $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$.

Satz: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset D$. f ist stetig in x_0 genau dann, wenn $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0-}$ gilt.

8.10 Monotone Funktionen und Stetigkeit

Definition: Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *monoton wachsend* [bzw. *monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{[bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)\text{]}.$$

f heißt *streng monoton wachsend* [bzw. *streng monoton fallend*], falls für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{[bzw. } f(x_1) > f(x_2)\text{]}.$$

f heißt *monoton*, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist, und f heißt *streng monoton*, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beispiele: $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht monoton.
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ ist monoton wachsend, aber *nicht streng* monoton wachsend.

Satz: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(a) Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].

(b) Ist f zusätzlich stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(hier ohne Beweis)

8.11 Der Logarithmus

Es gilt $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv und stetig.

Definition: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt (natürlicher) *Logarithmus* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dh also $\ln x := \log x := E^{-1}(x)$ für $x \in (0, \infty)$.

Somit ist $\ln(E(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $E(\ln y) = y$ für alle $y \in (0, \infty)$.

Eigenschaften: ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0,\infty)) = \mathbb{R}$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.

$\ln x \to \infty$ für $x \in \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$.

Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

[Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} E(\ln x + \ln y) &= E(\ln x)E(\ln y) = xy = E(\ln(xy)), \\ E(\ln x - \ln y) &= E(\ln x)E(-\ln y) = xE(\ln y)^{-1} = x/y = E(\ln(x/y)).] \end{aligned}$$

8.12 Die allgemeine Potenz

Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:

$$a^x := E(x \ln a) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Nach 7.11 stimmt dies für $x \in \mathbb{Z}$ mit der bisherigen Definition überein. Für $x = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist (ebenfalls nach 7.11) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Für $x = p/q \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ folgt aus 7.11:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Für $a = e$ erhalten wir $e^x = E(x)$ wie in 7.11. Wir schreiben in Zukunft in der Regel e^x statt $E(x)$.

Eigenschaften: Für $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $a^x > 0$;

(2) die Funktion $x \mapsto a^x$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig (wegen 8.6);

(3) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} ? a^x a^y$;

(4) $a^{-x} = e^{-x \ln a} = (e^{x \ln a})^{-1} = (a^x)^{-1} = 1/a^x$;

(5) $\ln(a^x) = \ln(E(x \ln a)) = x \ln a$;

(6) $(a^y)^x = e^{x \ln(a^y)} \overset{(5)}{=} e^{xy \ln a} = a^{xy}$.

Der allgemeine Logarithmus: Sei $a > 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0,\infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Die Umkehrfunktion $\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt *Logarithmus zur Basis a*. Es ist also $\log_a(a^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a^{\log_a y} = y$ für alle $y \in (0,\infty)$.

Satz: Für alle $y \in (0,\infty)$ gilt $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

Denn $a^{\frac{\ln y}{\ln a}} = E(\frac{\ln y}{\ln a} \ln a) = E(\ln y) = y$.

8.13 Abgeschlossene Mengen

Definition: Sei $D \subset \mathbb{R}$. D heißt *abgeschlossen*, falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_0 \in D$.

Beispiele: (1) Folgende Mengen sind abgeschlossen: $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

(2) Folgende Mengen sind nicht abgeschlossen: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, (a, ∞), $(-\infty, a)$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Satz: Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, D abgeschlossen und beschränkt, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(D)$ abgeschlossen und beschränkt und es gibt $x_1, x_2 \in D$ mit

$$\text{für alle } x \in D \text{ gilt: } \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

(dh "f nimmt auf D Maximum und Minimum an").

Folgerung: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $f([a, b]) = [c, d]$.

Beispiel: $D = [1, 53]$ und $f(x) := x^3 \sin(e^x + \ln x)$.

9 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

9.1 Die Zahl π

Vorbereitungen: Wir interessieren uns für Nullstellen der Cosinus-Funktion. Nach 7.12 gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Die Reihe ist alternierend. Wie beim Leibnizkriterium 7.4 können wir durch Abbrechen der Reihe bei $n = n_0$ Abschätzungen nach oben oder nach unten angeben, wenn nur die Folge $(x^{2n}/(2n)!)_{n \geq n_0}$ monoton fallend ist. Wegen

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq \frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \Leftrightarrow (2n+2)(2n+1) \geq x^2$$

gilt dies für $n_0 = 1$, wenn $x^2 \leq 12$, dh $|x| \leq 2\sqrt{3}$ ist.
Also gilt für alle $x \in [0, 2\sqrt{3}]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \geq \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Insbesondere ist $\cos\sqrt{2} \geq 0$ und $\cos(\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}) \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz 8.8 gibt es mindestens ein $x_0 \in [\sqrt{2}, \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}}]$ mit $\cos x_0 = 0$.

Definition: Wir definieren $\pi/2$ als die kleinste Nullstelle des Cosinus im Intervall $[0, 2]$, also

$$\frac{\pi}{2} := \inf\{x_0 \in [0, 2] : \cos x_0 = 0\}.$$

Beachte: Es gilt

$$\sqrt{2} \leq \pi/2 \leq \sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} < 2 < 2\sqrt{3}$$

und $\sqrt{2} \approx 1.41421$, sowie $\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{3}} \approx 1.59245$.

Bemerkung: Nach 7.12 gilt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Argumente in der Vorbetrachtung zeigen dann

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \geq 0 \quad \text{für alle } x \in [0, \sqrt{6}].$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt also $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

9.2 Eigenschaften

Aus den Additionstheoremen in 7.12 erhalten wir:

(1) $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\pi) = -\sin x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$;

(3) $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$;

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).

(5) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(\pi+x) = -\sin(\pi-x)$, $\cos(\pi+x) = \cos(\pi-x)$;

(6) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$, $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\cos(\frac{\pi}{2}-x)$;

(7) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Hieraus können wir alle Nullstellen von sin und cos bestimmen:

(8) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

(9) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.

(10) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$.

Schließlich geben wir noch an:

(11) $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Außerdem erinnern wir an:

(12) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$.

9.3 Monotonie für sin und cos

Es reicht, die Funktionen auf dem Intervall $[0,\pi/2]$ zu betrachten. Dabei ist $\sin x > 0$ für $x \in (0,\pi/2]$ und $\cos x > 0$ für $x \in [0,\pi/2)$. Für $x, x+h \in [0,\pi/2]$ mit $h > 0$ gilt also

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \underbrace{\sin x \sin h}_{>0} > \cos x,$$

dh cos **ist auf** $[0,\pi/2]$ **streng monoton fallend**.

Folglich ist $\sin x$ auf $[0,\pi/2]$ streng monoton wachsend (wegen $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$ für $x \in [0,\pi/2]$).

9.4 Arcussinus und Arcuscosinus

Wegen 9.3 und 9.2(6) ist $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ streng monoton fallend, nach 8.7(2) (Stetigkeit von Potenzreihen) ist diese Abbildung stetig und wegen 8.10 ist sie bijektiv.

Die Umkehrabbildung $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ heißt *Arcuscosinus.*

Eigenschaften: $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv. Es gilt $\arccos(-1) = \pi$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$.

Wegen 9.3 und 9.2(12) ist $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ streng monoton wachsend. Auch diese Funktion ist stetig und bijektiv.

Die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ heißt *Arcussinus.*

Eigenschaften: Die Funktion $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Es gilt $\arcsin(1) = \pi/2$, $\arcsin 0 = 0$ und $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ für alle $x \in [-1,1]$.

Achtung: Wegen 9.2 sind für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch die Abbildungen

$$\cos : [k\pi, (k+1)\pi] \to [-1,1], \qquad \sin : [(2k-1)\pi/2, (2k+1)\pi/2] \to [-1,1]$$

streng monoton, stetig und bijektiv. Für $k \neq 0$ sind ihre Umkehrabbildungen von den eben definierten Funktionen arccos und arcsin verschieden!

9.5 Der Tangens

Definition: Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens.* (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ gerade die Nullstellen des Cosinus enthält.)

Eigenschaften: Es gilt $\tan 0 = 0$, $\tan \pi/4 = 1$, sowie für alle x im Definitionsbereich, dh für alle $x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$:

$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(x + \pi) = \tan x.$$

Somit ist der Tangens eine π-periodische Funktion.

Außerdem ist tan auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend mit $\tan x \to \infty$ für $x \to \pi/2-$ und $\tan x \to -\infty$ für $x \to -\pi/2+$.

Folglich ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ heißt *Arcustangens.*

Eigenschaften: Es gilt $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \pi/4$ und $\arctan(-x) = -\arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Sei $k \in \mathbb{Z}$. Man sieht leicht, dass die Umkehrabbildung von $\tan : (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2) \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{R} \to (k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2), x \mapsto k\pi + \arctan x.$$

9.6 Anwendung: Polarkoordinaten

Definition und Satz: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\varphi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Betrag von* z und $\varphi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Satz: Für jedes Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $a^2 + b^2 = 1$ gibt es genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $\cos\varphi = a$ und $\sin\varphi = b$.

Bemerkung: Dabei ist $\varphi = \arcsin b$, falls $a \geq 0$ ist, und $\varphi = \arccos a$, falls $b \geq 0$ ist. Sind $a, b < 0$, so ist $\varphi = \arccos |a| - \pi = \arcsin |b| - \pi$.

Alternativ hat man $\varphi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\varphi = b\pi/2$ für $a = 0$ (dann $b \in \{-1, 1\}$), sowie $\varphi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\varphi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.

Bemerkung: Es gilt $e^{i\psi} = 1$ genau dann, wenn $\psi \in 2\pi\mathbb{Z}$ ist. Insbesondere gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unendlich viele $\psi \in \mathbb{R}$ mit $z = |z|e^{i\psi}$.

9.7 Hyperbelfunktionen

Definiere für $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(*Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus*).

Dann gilt $\cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$, sowie

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \cosh x \to \infty, \quad \sinh x &\to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \\ \cosh x \to \infty, \quad \sinh x &\to -\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty, \end{aligned}$$

sowie

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Reihendarstellungen: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Folgerung: Die Funktionen

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty) \quad \text{und} \quad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sind streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y. \end{aligned}$$

Definition: Die Funktion

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

heißt *Tangens hyperbolicus*.

Es ist $\tanh(-x) = -\tanh x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\tanh 0 = 0$. Außerdem gilt $\tanh x \to 1$ für $x \to \infty$ und $\tanh x \to -1$ für $x \to -\infty$.

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

9.8 Areafunktionen

Definition: Die Umkehrfunktionen von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ und $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ heißen $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*Areasinus*), $\operatorname{Arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ (*Areacosinus*) und $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ (*Areatangens*). Diese Funktionen sind jeweils streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

9.9 Weitere Funktionen

Es gibt noch weitere Funktionen, auf die wir hier nicht näher eingehen, z.B. $\cot x = 1/\tan x$, $\sec x = 1/\sin x$, $\operatorname{sech} x = 1/\sinh x$ etc.

10 Differentialrechnung

In diesem Abschnitt sei $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall.

10.1 Differenzierbarkeit

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

Idee: Approximation von f "in der Nähe von x_0" durch eine *lineare* Funktion (da lineare Funktionen leichter zu behandeln sind):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \sim f(x_0) + a(x - x_0).$$

Definition: f heißt in $x_0 \in I$ *differenzierbar* (*diffbar*), falls der Limes $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt *die Ableitung von f in x_0*, Bezeichnung: $f'(x_0)$.

Die Funktion f heißt *auf I differenzierbar*, falls f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, die *Ableitung von f auf I*.

Bemerkung: Es ist $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Beispiele: (1) $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \in \mathbb{R}$, ist auf I differenzierbar mit $f' = 0$ auf I.

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar, denn für $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & , h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht.

(3) $I = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \neq x_0$ ist nämlich nach 4.9(1)

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k \to nx_0^{n-1} \ (x \to x_0).$$

(4) exp, sin, cos, sinh, cosh sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$. Für $x, h \in \mathbb{R}$ mit $h \neq 0$ gilt nämlich, wie man aus der Definition von e^h sieht,

$$\frac{e^h - 1}{h} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!}$$

und damit nach der Dreiecksungleichung

$$\Big|\frac{e^h-1}{h}-1\Big| \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{|h|^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|h|^{n+1}}{(n+2)!} \le |h|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|h|^n}{n!} \le |h|e^{|h|}.$$

Nach dem Sandwichsatz für Grenzwerte und der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist somit

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

und somit, wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, auch

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\to 1} \to e^x \ (h\to 0).$$

Aus der Reihendarstellung des Sinus sieht man

$$\frac{\sin(h)}{h}-1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n+1)!}-1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n}}{(2n+1)!}$$

und somit, wieder wegen der Dreiecksungleichung,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\sin(h)}{h}-1\Big| &\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h|^{2n}}{(2n+1)!} = h^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|h|^{2n-2}}{(2n+1)!} = h^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|h|^{2n}}{(2n+3)!}\\ &\le h^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^k}{(k+3)!} \le h^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^k}{k!} = h^2e^{|h|}\end{aligned}$$

Aus der Reihendarstellung des Cosinus erhält man

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{h^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{h^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

und somit wie oben

$$\Big|\frac{\cos(h)-1}{h}\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|h|^{2n+2}}{(2n+2)!} = h^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|h|^{2n}}{(2n+2)!} \le h^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|h|^k}{k!} = h^2e^{|h|}$$

Mit diesen beiden Abschätzungen für Cosinus und Sinus sieht man

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1 \quad \text{und} \ \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$$

und nach den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus und der Definition 8.4 der Grenzwerte für Funktionen folgt daraus

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} = \sin x\underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{\to 0}+\cos x\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 0}\\ &\to \cos x \ (h\to 0).\end{aligned}$$

und

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 0}$$

$$\to -\sin x \ (h \to 0).$$

Die Beweise für sinh und cosh sind analog.

Satz: Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.
Beweis: Da I ein Intervall ist, ist $x_0 \in I$ Häufungspunkt von I. Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ ist dann

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) \to f'(x_0)\cdot 0 = 0 \ (x \to x_0).$$

Also ist f in x_0 stetig.

10.2 Ableitungsregeln

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
(1) $\alpha f + \beta g$ in differenzierbar in $x_0 \in I$ und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(2) fg ist differenzierbar in x_0 und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \qquad \textit{Produktregel.}$$

(3) Ist $g(x_0) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I \cap U_\delta(x_0) =: J$. Die Funktion $\frac{f}{g} : J \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \textit{Quotientenregel.}$$

Beweis: (1) ist klar wegen den Grenzwertsätzen für Folgen und der Def. von Grenzwerten für Funktionen.
(2) Für $x \in I \setminus \{x_0\}$ gilt

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

woraus für $x \to x_0$ die Behauptung folgt (beachte, dass $g(x) \to g(x_0)$, da g nach obigem Satz in x_0 stetig ist).

(3) Wegen (2) reicht $f = 1$. Nach obigem Satz ist g auch stetig in x_0. Somit erhalten wir die Existenz von δ aus demselben Argument wie das in dem wir sahen, daß es für eine Funktion g die stetig in x_0 ist mit $g(x_0) \neq 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $g(x) \neq 0$ für alle $x \in J = U_\delta(x_0) \cap I$.

Nun zur Diffbarkeit: Beachte, dass J ein Intervall ist. Für $x \in J \setminus \{x_0\}$ ist

$$\frac{1/g(x) - 1/g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)},$$

woraus für $x \to x_0$ die Behauptung folgt. Wieder beachte man $g(x) \to g(x_0)$ für $x \to x_0$ wegen der Stetigkeit von g in x_0. ∎

Beispiele: $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ sind auf $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2)$ bzw. auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 \text{ auf } \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} + \pi/2), \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Beweis: Es ist nämlich

$$\tan' = (\frac{\sin}{\cos})' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$

Der Beweis für tanh ist analog. ∎

10.3 Kettenregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar und $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $f(I) \subset J$. Sei $g : J \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

(“äußere Ableitung mal innere Ableitung”).

Beweis: Die Idee ist zu schreiben

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dann läßt man $x \to x_0$ gehen und nutzt die Stetigkeit von f an x_0 aus, damit man

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \to g'(f(x_0))$$

behauptet. Das wäre auch korrekt, aber leider kann man dabei durch Null dividieren. Es kann vorkommen[9], daß $f(x) - f(x_0) = 0$ ist für undlich viele[10] x nahe x_0!

[9]Z.B. ist die Funktion $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ überall differenzierbar und $f(x_n) = 0$ für eine Folge x_n, $x_n \neq 0$, mit $x_n \to 0$.

[10]Diesen Fehler findet man in allen Mathebüchern für Ingenieure die ich kenne.

Um diesen Fehler zu vermeiden, setzen wir

$$d : J \to \mathbb{R}, d(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases} .$$

Dann gilt $d(y) \to g'(y_0)$ für $y \to y_0$, also auch $d(f(x)) \to g'(f(x_0))$ für $x \to x_0$, da f in x_0 stetig ist. Außerdem gilt $g(y) - g(y_0) = d(y)(y - y_0)$ für **alle** $y \in J$, also

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = d(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad (x \to x_0).$$

Beispiel: Sei $a > 0$ und $h(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist h auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$h'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = (e^{x \ln a}) \ln a = a^x \ln a.$$

10.4 Satz über die Umkehrfunktion:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf I. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis: Nach dem Zwischenwertsatz ist $f(I)$ ein Intervall. Sei $y \in f(I)$ und $x := f^{-1}(y)$. Dann gilt

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad (y \to y_0),$$

da wegen der Stetigkeit von f^{-1} aus $y \to y_0$ folgt $x \to x_0$. ∎

Bemerkung: Glaubt man an die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion, dann kann man sich die Formel für die Ableitung auch schnell aus der Kettenregel herleiten. Da $y = f(f^{-1}(y))$ ist, gilt nach der Kettenregel

$$1 = (y)' = f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y)$$

und somit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beispiele: Die Funktionen $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{Artanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar. Dabei ist ln die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$, also

$$\ln' y = (e^{\ln y})^{-1} = \frac{1}{y} \quad \text{für jedes } y > 0.$$

Die Funktionen arcsin : $(-1,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$, arccos : $(-1,1) \to (0,\pi)$ und Arcosh : $(1,\infty) \to (0,\infty)$ sind differenzierbar.

Es zeigt sich, daß die Ableitungen der Umkehrfunktionen oft einfache Funktionen sind. Zum Beispiel, da $\tan' = 1 + \tan^2$ hat man auch

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

10.5 Lokale Extremstellen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.

Definition: g hat in x_0 ein *lokales Maximum* [bzw. *Minimum*], falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\forall x \in D \cap U_\delta(x_0) : g(x) \leq g(x_0) \quad [\text{ bzw. } g(x) \geq g(x_0)],$$

dh $\forall x \in D$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow g(x) \leq g(x_0)$ [bzw. $g(x) \geq g(x_0)$].

Ein lokales Maximum/Minimum wird auch als *relatives Maximum/Minimum* bezeichnet.

Ein *relatives* oder *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

Satz: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset I$, so ist $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Ist $M \subset \mathbb{R}$ eine Menge, so heißen Punkte $x_0 \in M$, für die es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset M$ gibt, *innere Punkte von M*.

Da I ein Intervall ist, ist $x_0 \in I$ genau dann ein innerer Punkt von I, wenn $x_0 \notin \{\sup I, \inf I\}$ gilt.

Beweis des Satzes: Wir nehmen an, dass f in x_0 ein lokales Maximum hat (sonst betrachte $-f$). Durch notfalls Verkleinern können wir weiter annehmen, daß für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ auch $f(x) \leq f(x_0)$ gilt. Insbesondere gilt für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ dann $f(x) \leq f(x_0)$, also $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ und damit $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ und $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, woraus $f'(x_0) \geq 0$ folgt. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben $f'(x_0) = 0$. ∎

Bemerkung: Falls $x_0 = \inf I$ ist und f ein lokales Maximum bei x_0 hat, so zeigt der obige Beweis, dass dann immer noch die Ungleichung $f'(x_0) \leq 0$ gelten muss. Analoge Ungleichungen gelten für lokale Minima und $x_0 = \sup I$.

Hierbei ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \in I, x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

was auch für Punkte x_0 am rand des Intervalls I sinnvoll ist.

10.6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz: [Mittelwertsatz (MWS)] Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst eine Hifsaussage, die oft auch Satz von Rolle genannt wird: Sei $f(a) = f(b)$. Da die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem beschränkten und abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ ihr Maximum und Minimum annimmt, finden wir $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Somit hat f in x_1 ein lokales Minimum und in x_2 ein lokales Maximum.

Fall 1, $x_1 \in (a, b)$: Dann wenden wir 10.5 an und erhalten $f'(x_1) = 0$.

Fall 2, $x_1 \in \{a, b\}$, $x_2 \in (a, b)$: Wir wenden 10.5 an und erhalten $f'(x_2) = 0$.

Fall 3, $x_1, x_2 \in \{a, b\}$: Dann ist f konstant und $f'(x) = 0$ für jedes $x \in (a, b)$.

Dies beweist den Satz von Rolle.

Im allgemeinen Fall setzen wir $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ für $x \in [a, b]$ und wenden das Gezeigte auf g an (es ist $g(a) = f(a) = g(b)$). Wir erhalten $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wie gewünscht. ∎

Der Mittelwertsatz hat einige **sehr nette**

Folgerungen: Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar.

(1) f ist auf I konstant $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ auf I.

(2) Ist $f' = g'$ auf I, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$ auf I.

(3) Ist $f' \geq 0$ [bzw. $f' \leq 0$, $f' > 0$, $f' < 0$] auf I, so ist f auf I monoton wachsend [bzw. monoton fallend, streng monoton wachsend, streng monoton fallend].

(4) Ist x_0 ein innerer Punkt von I und $f'(x_0) = 0$ und für ein $\delta > 0$ gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, so hat $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 ein lokales Maximum. Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, so hat $f : I \to \mathbb{R}$ in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis: (1) "$\Rightarrow$" ist einfach. "$\Leftarrow$": Nach MWS ist $f(b) = f(a)$ für alle $a, b \in I$.

(2) Wende (1) an auf $f - g$.

(3) Ist $f' \geq 0$ auf I, so gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) \geq 0$$

für ein $\xi \in (x, y)$. Es folgt $f(y) \geq f(x)$. Die anderen Aussagen beweist man analog.

(4) Nach (3) ist f auf $(x_0 - \delta, x_0)$ streng monoton wachsend und auf $(x_0, x_0 + \delta)$ streng monoton fallend. Also ist $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. ∎

Eine Erweiterung auf zwei Funktion bietet der

Satz: [2ter Mittelwertsatz] Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a)). \tag{1}$$

Beweis: Definiere die Hilfsfunktion

$$h(x) := (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)) - (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)).$$

Dann ist h diffbar und $h(a) = h(b) = 0$, also gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Wegen

$$h'(x) = g'(x)(f(b) - f(a)) - f'(x)(g(b) - g(a))$$

folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung: 1) Für $g(x) = x$ ergibt sich der erste Mittelwertsatz.
2) Zur Quotientenform des zweiten Mittelwertsatzes kommt man unter zusätzlichen Voraussetzungen: Gilt z.B. $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist auch $g(b) - g(a) \neq 0$, dann nach dem ersten Mittelwertsatz ist, für ein $\xi' \in (a, b)$ auch $g(b) - g(a) = g'(\xi') \neq 0$. Also können wir durch $g(b) - g(a)$ und $g'(\xi)$ in (1) dividieren und sehen

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

für ein $\xi \in (a, b)$. ∎

10.7 Die Regeln von de l'Hospital:

Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter sei $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

(a) Ist $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L \quad (x \to a).$$

(b) Ist $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, so gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to L \quad (x \to a).$$

Beweis: Hier nur für Teil (a) (und für $a \neq -\infty$): Zunächst eine Vorbemerkung: Wegen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ können wir f und g durch $f(a) := g(a) := 0$ stetig nach a fortsetzen. Damit sind f, g stetig auf dem Intervall $[a, x]$ und wir wenden darauf den zweiten Mittelwertsatz an: Es gibt ein $a < \xi < x$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Sei nun $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n > a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann existiert nach der Vorbemerkung eine Folge $(\xi_n)_n$ mit $a < \xi_n < x_n$, also auch $\lim_{n\to\infty} \xi_n = a$ und

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da nach Vorausetzung $\lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)} = L$ existiert, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = L.$$

Nach Definition des Limes gilt also $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. ∎

Beispiele: (1) Für $a, b > 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b.$$

(2) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

(3) Es ist

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

(4) Aus (3) folgt mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

Bemerkung: Hier ist es jeweils so, daß erst die Existenz des letzten Limes die Existenz des ersten Limes garantiert (vgl. die Regeln oben).

10.8 Zwischenwerteigenschaft der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion braucht nicht stetig zu sein. Z.B., ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(0) := 0$ und $f(x) := x^2 \sin(x^{-1})$, $x \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber ihre Ableitung ist in 0 *nicht* stetig! Nichtsdestotrotz hat die Ableitung einer Funktion – ählich

Dieses Kapitel in Vorlesung weglassen

der stetigen Funktionen – die Zwischenwerteigenschaft:
Satz: Sei f in $[a, b]$ differenzierbar und $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt f' in (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Beweis: Sei $f'(a) < f'(b)$, ansonsten betrachte die Funktion $-f$, und sei $c \in (f'(a), f'(b))$. Definiere die Hilfsfunktion
$$g(x) := f(x) - cx.$$
Dann müssen wir zeigen, dass es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$ gibt. Die stetige Funktion g nimmt auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ ihr Minimum an. Wenn das Minimum von g nicht an den Endpunkten des Intervalls $[a, b]$ angenommen wird, sind wir fertig, da es dann ein inneres Extremum ist und die Ableitung von g dort Null sein muss!

Wäre nun $g(a)$ das Minimum, so wäre $g(x) \geq g(a)$ für alle $x \in [a, b]$ und somit auch $g'(a) = \lim x \to a \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0$. Dies ist aber im Widerspruch zu $g'(a) = f'(a) - c < 0$, da $c > f'(a)$.

Genauso kann $g(b)$ nicht das Minimum sein, da dann $g(x) \geq g(b)$ für alle $x \in [a, b]$ gelte und somit $g'(b) = \lim_{x \to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \leq 0$ wäre, was im Widerspruch zu $g'(b) = f'(b) - c > 0$ ist. ∎

10.9 Höhere Ableitungen

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf I differenzierbar.

(a) f heißt in $x_0 \in I$ *zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt
$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$
die 2. *Ableitung von f in x_0*.

f heißt auf I *zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$ *zweite Ableitung von f auf I*.

Entsprechend definiert man die höheren Ableitungen von f *rekursiv*: Wenn $f^{(k)}$ erklärt und nochmals differenzierbar ist, so setzt man
$$f^{(k+1)} := (f^{(k)})' \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$
Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ eine k-te Ableitung besitzt, sagt man auch, f ist k-mal differenzierbar. Nach dem Satz über Stetigkeit von Funktionen, die eine Ableitung besitzen, sind dann bereits $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ stetig, aber $f^{(k)}$ braucht nicht stetig zu sein.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt *auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig ist[11]. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.

[11] Dann sind nach Obigen auch schon $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)} : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Beispiele: (1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Hier ist $f^{(n)}(x) = e^x$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

(2) Es gilt $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$. Hier ist $\sin' = \cos$, $\sin'' = \cos' = -\sin$, $\sin''' = -\sin' = -\cos$ und $\sin^{(4)} = -\cos' = \sin$, etc.

(3) Für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$ gilt $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$. Also ist $f \in C^\infty((0, \infty))$.

(5) Für $a > 0$ und $f(x) = a^x$ für $x > 0$ ist $f^{(k)}(x) = (\ln a)^k a^x$.

(6) Für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^s$ mit $s \notin \mathbb{N}_0$, ist $f^{(k)}(x) = s(s-1)\ldots(s-k+1)x^{s-k}$.

10.10 Satz von Taylor

Sei $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. Um das Verhalten von f in der Nähe eines Punktes a zu studieren, wird man f nicht wie oben mit den Potenzen $1, x, x^2, \ldots, x^n$, sondern besser mit $1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^n$ darstellen. Es gilt dann mit geeigneten b_k

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k.$$

Die neuen Koeffizienten lassen sich sehr leicht mittels der höheren Ableitungen von f bestimmen: Zunächst folgt durch Einsetzen von $x = a$ bereits

$$b_0 = f(a).$$

Für die erste Ableitung von f gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k b_k (x-a)^{k-1}$$

und durch Einsetzen von $x = a$ erhält man

$$b_1 = f'(a).$$

Entsprechend erhält man induktiv

$$b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Also ist

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Eine solche Darstellung sollte nicht nur für Polynome, sondern auch auch für genügend oft diffbare Funktionen gelten. Zumindest, wenn man einen Fehlerterm zuläßt.

Satz (von Taylor): Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differenzierbar. Seien $x, a \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und a mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Restglied}}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $n = 0$ ist das der Mittelwertsatz.

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ schreiben wir

$$T_n(f;a)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad x \in I,$$

für das n-te Taylorpolynom von f bei Entwicklung um a und die obige Darstellung[12] für das Restglied wird Restglieddarstellung von Lagrange genannt.

Bemerkung: Falls $f \in C^\infty(I)$, so ist f um a in eine auf I konvergente Potenzreihe entwickelbar, falls für jedes $x \in I$ gilt:

$$T_n(f;a)(x) \to f(x) \quad (n \to \infty).$$

Gleichbedeutend damit ist, dass das entsprechende Restglied für jedes $x \in I$ für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Warnung: Das ist **nicht** für jedes $f \in C^\infty(I)$ der Fall! Wir diskutieren dies später.

Beweis des Satzes von Taylor: Der Beweis ist eigentlich simpel und folgt direkt aus dem Satz von Rolle, wenn man nur eine Hilfsfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ geschickt[13] definiert. Der Trick im Beweis ist, daß man x in I fest hält und das Taylorpolynom als Funktion des Aufhängepunktes a betrachtet. Um nicht total mit den Variablen in Verwirrung zu kommen, seien $a, b \in I$ fest mit $a < b$ (der Fall $a > b$ ist analog) und wir wollen zeigen, daß es ein $\xi \in (a, b)$ gibt mit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

[12] Es gibt also noch andere...!

[13] Wie man auf diese Hilfsfunktion kommt? Nun ja, man probiert mehrere Ansätze aus, bei mir ca. 5 und der 6 hat endlich geklappt oder schaut in einem Buch nach....

Dazu definieren wir die folgende Hilfsfunktion, in der der Aufhängepunkt a des Taylorpolynoms als freie Variable gesehen wird:

$$g(x) := f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - m\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei $m \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Man beachte, daß unabhängig von m immer $g(b) = 0$ gilt. Wir wählen $m \in \mathbb{R}$ einfach so, daß $g(a) = 0$ gilt, denn dann ist auch

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Das ist zwar ziemlich nahe an dem was wir wollen, aber das Problem ist, daß wir nicht wissen, was denn m genau ist. Um eine Darstellung für m zu erhalten, beachte man, daß die Funktion g in $[a, b]$ stetig und auf (a, b) diffbar ist. Wie man nachrechnet, gilt ferner

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + m\frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Nach dem Satz von Rolle (MWS) gibt es also ein $\xi \in (a, b)$ derart, daß $g'(\xi) = 0$. Daher kann die Zahl m charakterisiert werden durch $g'(\xi) = 0$ oder

$$m = f^{(n+1)}(\xi).$$

Damit haben wir

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit geeignetem $\xi \in (a, b)$ gezeigt. ∎

10.11 Lokale Extrema

Sei $n \geq 2$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f \in C^n(I)$ und $a \in I$ ein innerer Punkt von I (dh kein Randpunkt). Weiter sei

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(a) Ist n gerade und $f^{(n)}(a) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(a) < 0$], so hat f in a ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].

(b) Ist n ungerade, so hat f in a kein lokales Extremum.

Bemerkung: In der Anwendung ist meist $n = 2$. Ist $f'(a) = 0$, so gilt:

für $f''(a) > 0$ hat f in ein lokales Minimum,

für $f''(a) < 0$ hat f in ein lokales Maximum,

für $f''(a) = 0$ erhält man keine Entscheidung.

Beweis: $f^{(n)}$ ist stetig auf I mit $f^{(n)}(a) \neq 0$, somit gibt es $\delta > 0$ mit

$$f^{(n)}(\xi) f^{(n)}(a) > 0 \quad \text{für alle } \xi \in U_\delta(a) \subset I.$$

Nach dem Satz von Taylor und der Voraussetzung gibt es für jedes $x \in U_\delta(a)$ ein $\xi \in U_\delta(a)$ mit

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n.$$

Nun betrachte man das Vorzeichen der rechten Seite. ∎

Beispiel: (1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^n$. Es gilt $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = n! > 0$. Also hat f in 0 ein lokales Minimum falls n gerade ist[14]. Falls n ungerade ist, so ist $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$, also ist 0 weder lokales Minmum noch lokales Maximum!

(2) Sei $p > 1$, $\alpha > 0$. Bestimme das Maximum von $f(x) := \alpha x - x^p/p$ über $x \geq 0$.

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$. Für $x > 0$ ist $f'(x) = \alpha - x^{p-1}$ und $f''(x) = -(p-1)x^{p-2} < 0$. Weiter ist $f'(a) = 0$ genau dann, wenn $a = \alpha^{1/(p-1)}$ ist. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(\alpha^{1/(p-1)}) = (1 - \frac{1}{p})\alpha^{p/(p-1)} > 0$. Dies ist das gesuchte Maximum.

10.12 Ableitung von Potenzreihen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenradius $R \in (0, \infty]$, $I := (a - R, a + R)$ und

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.$$

Dann ist f auf I differenzierbar, und für jedes $x \in I$ gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}.$$

Ohne Beweis.

Bemerkung: Der Satz besagt, dass man Potenzreihen im Inneren des Konvergenzintervalls gliedweise differenzieren kann. Da f' wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius ist, kann man den Satz wiederholt anwenden und erhält damit: $f \in C^\infty(I)$ und für

[14] Dies ist sogar ein globes Minmum!

alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))a_n(x-a)^{n-k}, \quad x \in I.$$

Für $x = a$ erhält man

$$f^{(k)}(a) = k(k-1)(k-2) \cdot \ldots \cdot (k-(k-1))a_k = k!a_k.$$

Somit gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

und wir erhalten die Darstellung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad x \in I.$$

Also sind Potenzreihen f die Funktionen $f \in \mathbb{C}^\infty$ für die das zugehörige Taylorpolynom im Limes $n \to \infty$ gegen die Funktion wieder konvergiert (innerhalb des Konvergenzintervalls). Dies muss nicht für alle Funktionen in C^∞ der Fall sein, siehe später.

10.13 Identitätssatz für Potenzreihen

Sei $r > 0$ und $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$, $\sum_{n=0}^\infty b_n(x-a)^n$ reelle Potenzreihen, die auf $I := (a-r, a+r)$ konvergieren. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ und $g(x) := \sum_{n=0}^\infty b_n(x-a)^n$, $x \in I$. Es gebe eine Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in I mit $x_m \to a$ für $m \to \infty$ und $f(x_m) = g(x_m)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung: (1) Insbesondere gilt also:

$$f = g \text{ auf } I \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n,$$

aber die Voraussetzung lässt sich sehr abschwächen.
(2) Dies erlaubt den *Koeffizientenvergleich*: Wenn zwei Potenzreihen gleich sind, müssen sie dieselben Koeffizienten haben.

Beweis: Durch Betrachtung von $f - g$ und $a_n - b_n$ (Linearität!) dürfen wir $g = 0$ und $b_n = 0$ annehmen und müssen zeigen, daß falls $f(x_m) = 0$ ist, auch $a_n = 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Annahme: es gibt $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$. Dann gilt $f(x) = \sum_{n=n_0}^\infty a_n(x-a)^n$ und

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{n_0}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-a)^{n-n_0} \to a_{n_0} \quad (x \to a).$$

Also ist nach Voraussetzung $a_{n_0} = \lim_{m\to\infty} \frac{f(x_m)}{(x_m-a)^{n_0}} = \lim_{m\to\infty} \frac{0}{(x_m-a)^{n_0}} = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

Beispiel: (Dies wurde auch auf einem Übungszettel gemacht!) Wir wollen eine Funktion y bestimmen mit $y'(x) = xy(x)$ und $y(0) = 1$ und machen einen *Potenzreihenansatz* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Wegen $y(0) = 0$ ist $a_0 = 1$.
Nach 10.12 ist $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Außerdem ist

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1}.$$

Durch *Koeffizientenvergleich* (dh nach 13.6) erhalten wir $a_1 = 0$ und

$$n a_n = a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Durch Induktion erhält man hieraus $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$ und $a_{2k} = (2^k k!)^{-1}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Somit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und dies genügt tatsächlich den geforderten Bedingungen.

10.14 Eine C^∞ Funktion, die nicht durch ein Taylorpolynom approximierbar ist

Der folgende Satz ist sehr nützlich um zu zeigen, daß eine gegebene Funktion stetig differenzierbar ist.

Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Weiter sei f auf (a, x_0) und (x_0, b) differenzierbar. Existiert der Grenzwert $\alpha := \lim_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ und ist f in x_0 stetig, so ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = \alpha$ und f' ist in x_0 stetig.
Beweis: Für $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi(x))$$

für ein $\xi(x)$ zwischen x und x_0. Es gilt $\lim_{x\to x_0} \xi(x) = x_0$ und demnach auch

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(\xi(x)) = \alpha.$$

■

Beispiel: Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & ,x>0 \\ 0 & ,x\le 0 \end{cases}$ ist in $C^\infty(\mathbb{R})$.

Zum Aufwärmen zeigen wir erst mal, daß f auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist: Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} x^{-2}e^{-1/x} & ,x>0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases}.$$

Wegen $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = 0$ ist f in 0 stetig. Wegen $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} x^{-2}e^{-1/x} = \lim_{s\to\infty} s^2e^{-s} = 0$ ist f nach dem Satz in 0 differenzierbar mit $f'(0)=0$ und f' ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Nun zur allgemeinen Behauptung, daß $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ ist: Es ist klar, dass f auf $(-\infty,0)$ und auf $(0,\infty)$ beliebig oft differenzierbar ist. Wir zeigen, daß für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} & ,x>0 \\ 0 & ,x<0 \end{cases},$$

wobei p_n ein Polynom vom Grad $2n$ ist. Die Aussage für $x<0$ ist klar, für $x>0$ sieht man sie durch Induktion: Es ist

$$f'(x) = (e^{-1/x})' = x^{-2}e^{-1/x} = p_1(x^{-1})e^{-1/x}$$

also $p_1(s)=s^2$. Angenommen $f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1})e^{-1/x}$, dann ist

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= -p_n'(x^{-1})x^{-2}e^{-1/x} + p_n(x^{-1})x^{-2}e^{-1/x} = x^{-2}\big(p_n(x^{-1}) - p_n'(x^{-1})\big)e^{-1/x} \\ &= p_{n+1}(x^{-1})e^{-1/x} \end{aligned}$$

wobei $p_{n+1}(s) = s^2(p_n(s)-p_n'(s))$ von Grad $2(n+1)$ ist, sofern p_n Grad $2n$ hat.

Wir wenden nun den obigen Satz jetzt wiederholt an (dh sukzessive auf f, f', f'', etc.), wobei wir beachten, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{x\to 0+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0+} p_n(\frac{1}{x})e^{-1/x} = \lim_{s\to\infty} p_n(s)e^{-s} = 0.$$

Wir erhalten so, dass f, f', f'', etc. auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind. ∎

Bemerkung: Man beachte, daß für die obige Funktion gilt $f^{(n)}(0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Das heisst für das Taylorpolynom von f in Null gilt

$$T_n(f;0)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Da $f(x)=e^{-1/x}>0$ für $x>0$ ist, kann das Taylorpolynom nicht gegen f in jeder Umgebebung von 0 konvergieren! Die Funktion f läßt sich also nicht in eine Potentzeihe um $a=0$ entwickeln.

11 Integration

11.1 Ober- und Untersummen, oberes und unteres Integral

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt*, dh $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ beschränkt.

Definition: $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt eine *Zerlegung* von $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Eine Zerlegung Z_2 heißt *feiner* als Z_1 falls $Z_1 \subset Z_2$, d.h., Z_2 enthält alle Elemente von Z_1.

Sei $m := \inf f([a, b])$ und $M := \sup f([a, b])$. Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ein Zerlegung von $[a, b]$. Für $j = 1, 2, \ldots, n$ setze

$$\begin{aligned}
I_j &:= [x_{j-1}, x_j], \quad |I_j| := x_j - x_{j-1}, \quad m_j := \inf f(I_j), \quad M_j := \sup f(I_j), \text{ sowie} \\
s_f(Z) &:= \sum_{j=1}^{n} m_j |I_j| \qquad \textit{Untersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z, \\
S_f(Z) &:= \sum_{j=1}^{n} M_j |I_j| \qquad \textit{Obersumme} \text{ von } f \text{ bzgl. } Z.
\end{aligned}$$

Es ist $m \le m_j \le M_j \le M$, also wegen $|I_j| > 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} m|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} m_j|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} M_j|I_j| \le \sum_{j=1}^{n} M|I_j|.$$

Somit gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$:

$$(*) \qquad m(b-a) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le M(b-a).$$

11.2 Satz:

Seien Z_1, Z_2 Zerlegungen.

(1) Ist $Z_1 \subset Z_2$, so gilt $s_f(Z_1) \le s_f(Z_2) \le S_f(Z_2) \le S_f(Z_1)$.

(2) Es gilt $s_f(Z_1) \le S_f(Z_2)$.

Beweis: (1) Wende $(*)$ an auf diejenigen Teilintervalle von Z_1, die durch Punkte von Z_2 weiter unterteilt werden.

(2) Setze $Z := Z_1 \cup Z_2$. Wegen $Z_1 \subset Z$ und $Z_2 \subset Z$ gilt dann nach (1) und $(*)$:

$$s_f(Z_1) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_2).$$

$\blacksquare$

Nach $(*)$ können wir definieren:

$$s_f := \int_a^b f(x)\,dx := \sup\{s_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\},$$

das *untere Integral von* f über $[a,b]$ und

$$S_f := \int_a^b f(x)\,dx := \inf\{S_f(Z) : Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\}$$

das *obere Integral von* f über $[a,b]$.

Wegen $(*)$ und (2) gilt dann

$$(**) \qquad m(b-a) \leq s_f \leq S_f \leq M(b-a).$$

[Zunächst folgt aus (2) durch Supremumsbildung über Z_1: $s_f \leq S_f(Z_2)$ für jede Zerlegung Z_2. Dann bilde man das Infimum über alle Z_2.]

11.3 Definition

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *beschränkt.* Dann heißt f (Riemann-)*integrierbar* (*ib*), falls $s_f = S_f$ gilt.

In diesen Falle heißt

$$\int_a^b f\,dx := \int_a^b f(x)\,dx := S_f (= s_f)$$

das (Riemann-)*Integral* von f über $[a,b]$.

Beispiele: (1) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c$, $x \in [a,b]$. Dann ist $m = M = c$ und aus $(**)$ folgt $s_f = S_f = c(b-a)$. Also ist f integrierbar und

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

(2) Sei $a = 0$, $b = 1$ und $f(x) := \begin{cases} 1 & , x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Ist $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[0,1]$ und sind m_j, M_j, I_j wie oben, so haben wir $m_j = 0$, $M_j = 1$ für alle j, also $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$. Folglich ist

$$s_f = 0 \neq 1 = S_f,$$

und f ist nicht integrierbar über $[0,1]$.

11.4 Definition

Wir setzen

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : \; f \text{ ist beschränkt und über } [a,b] \text{ integrierbar}\}$$

(Menge der über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen).

11.5 Satz:

Seien $f, g \in R[a,b]$.

(1) Gilt $f \le g$ auf $[a,b]$, so ist $\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$.

(2) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx.$$

[(1) ist klar, (2) hier ohne Beweis.]

11.6 Satz:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt $f \in R[a,b]$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z gibt mit $S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$.

Insbesondere: Ist $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit

$$S_f(Z_m) - s_f(Z_m) \to 0, \quad \text{für } m \to \infty,$$

so ist $f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f\,dx = \lim_{m\to\infty} S_f(Z_m) = \lim_{m\to\infty} s_f(Z_m)$.

Beweis: Das ergibt sich aus der Definition und Satz 11.2(1).

11.7 Beispiel:

Sei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $0 < a < b$. Wir zeigen, daß $f : x \mapsto x^c$ über $[a,b]$ integrierbar ist und daß gilt

$$\int_a^b x^c\,dx = \frac{b^{c+1} - a^{c+1}}{c+1}.$$

Der Trick, um möglichst einfach zu rechnen, ist es hier eine *nicht*-äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ zu wählen. Dazu sei zu gegebenen $n \in \mathbb{N}$, $q > 1$ so, daß $q^n = b/a$ (q hängt also auch von n ab und wir sollten besser q_n schreiben, lassen den Subskript aber aus Gründen der Einfachheit weg). Ferner sind $x_j := aq^j$ für $j = 0, 1, \dots, n$ und Z die Zerlegung $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Sind I_j, m_j, M_j wie in 11.1, so gilt $|I_j| = x_j - x_{j-1} = aq^{j-1}(q-1)$ und, wenn $c > 0$ ist[15], $m_j = f(x_{j-1}) = (aq^{j-1})^c = a^c q^{c(j-1)}$, $M_j = f(x_j) = (aq^j)^c = a^c q^{cj}$ und

$$\begin{aligned} S_f(Z) &= \sum_{j=1}^{n} M_j|I_j| = \sum_{j=1}^{n} a^c q^{cj}\, aq^{j-1}(q-1) = a^{c+1}\frac{q-1}{q} \sum_{j=1}^{n}(q^{c+1})^j, \\ s_f(Z) &= \sum_{j=1}^{n} m_j|I_j| = \sum_{j=1}^{n} a^c q^{c(j-1)}\, aq^{j-1}(q-1) = a^{c+1}(q-1) \sum_{j=1}^{n}(q^{c+1})^{j-1}. \end{aligned}$$

Wegen der geometrischen Summenformel ist $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$ für alle $\alpha \neq 1$. Also erhalten wir mit $\alpha = q^{m+1}$,

$$\begin{aligned} S_f(Z) &= a^{c+1}\frac{q-1}{q} q^{c+1} \sum_{j=0}^{n-1}(q^{c+1})^j = q^c \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\, a^{c+1}\big(q^{(c+1)n} - 1\big), \\ s_f(Z) &= a^{c+1}(q-1) \sum_{j=0}^{n-1}(q^{c+1})^j = \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\, a^{c+1}\big(q^{(c+1)n} - 1\big). \end{aligned}$$

Man erinnere sich an $q^n = b/a$. Somit ist $q^{(c+1)n} = (q^n)^{c+1} = (b/a)^{c+1}$ und ferner

$$a^{c+1}\big(q^{(c+1)n} - 1\big) = a^{c+1}\big((b/a)^{(c+1)} - 1\big) = b^{c+1} - a^{c+1}.$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} S_f(Z) &= q^c \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\big(b^{c+1} - a^{c+1}\big), \\ s_f(Z) &= \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\big(b^{c+1} - a^{c+1}\big). \end{aligned}$$

Beachte $q = (b/a)^{1/n} \to 1$ für $n \to \infty$. Wegen der Definition der Ableitung und den Grenzwertsätzen gilt auch

$$\lim_{q\to 1+} \frac{q-1}{q^{c+1}-1} = \lim_{q\to 1+} \frac{1}{\frac{q^{c+1}-1}{q-1}} = \frac{1}{\lim\limits_{q\to 1+} \frac{q^{c+1}-1}{q-1}} = \frac{1}{c+1}$$

und damit hat man

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_f(Z) &= \lim_{q\to 1+} q^c \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\big(b^{c+1} - a^{c+1}\big) = \frac{b^{c+1} - a^{c+1}}{c+1}, \\ \lim_{n\to\infty} s_f(Z) &= \lim_{q\to 1+} \frac{q-1}{q^{c+1}-1}\big(b^{c+1} - a^{c+1}\big) = \frac{b^{c+1} - a^{c+1}}{c+1}. \end{aligned}$$

[15] Der Fall $c < 0$ ist analog, es vertauschen sich nur die Ausdrücke für m_j und M_j

Also ist $f \in R[a,b]$ und die Formel für das Integral gilt. ∎

Bemerkung: Ist $c = -1$ und $b > a = 1$, und schaut man sich genauer die Ober und Untersummen in obigem Beispiel an, so sieht man, daß diese dann durch einen Ausdruck der Form

$$s_f(Z) = (q-1)\sum_{j=1}^{n} 1 = n(q-1) = n(b^{1/n}-1)$$

gegeben ist (und ähnlich für die Obersumme $Z_f(Z_m)$). Da

$$\lim_{n\to\infty} n(b^{1/n}-1) = \lim_{s\to 0+} \frac{b^s-1}{s} = \lim_{s\to 0+} \frac{e^{s\ln b}-1}{s} = \ln b,$$

sieht man in diesem Fall, daß

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b.$$

11.8 Satz:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in R[a,b]$.

Beweis: Sei f monoton wachsend (sonst betrachte $-f$ und verwende 11.5(2)). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_j := a + j(b-a)/n$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Sind I_j, M_j und m_j wie in 11.1, so gilt $|I_j| = (b-a)/n$, $M_j = f(x_j)$ und $m_j = f(x_{j-1})$. Somit haben wir

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)|I_j| = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}(f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0$$

für $n \to \infty$, und die Behauptung folgt aus 11.6. ∎

11.9 Satz:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in R[a,b]$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_j := a + j(b-a)/n$ für $j = 0, 1, \ldots, n$ und $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Sind I_j, M_j und m_j wie in 11.1, so gilt $|I_j| = (b-a)/n$ und

$$S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j)|I_j| = \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}(M_j - m_j) \le (b-a)\max\{M_j - m_j : j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da (siehe Übungszettel) jede stetige Funktion f auf $[a,b]$ *gleichmäßig stetig* ist: D.h., es gibt ein $\delta > 0$ so, daß für alle $x, \tilde{x} \in [a,b]$ gilt:

$$|x - \tilde{x}| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Wir wählen n so groß, daß $\frac{b-a}{n} < \delta$ ist. Sind dann $x, \tilde{x} \in I_j$ für ein $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so folgt $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon/(b-a)$. Wir haben also für jedes $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$M_j - m_j = \sup\{f(x) : x \in I_j\} - \inf\{f(\tilde{x}) : \tilde{x} \in I_j\} = \sup\{f(x) - f(\tilde{x}) : x, \tilde{x} \in I_j\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Zusammen erhalten wir

$$S_f(Z) - s_f(Z) \leq (b-a) \max\{M_j - m_j : j = 1, \ldots, n\} \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

woraus nach 11.6 die Behauptung folgt. ∎

Beispiele: (1) exp, sin, cos sind über jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ integrierbar.

(2) Eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist über jedem $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ integrierbar.

Zur Berechnung von Integralen:

11.10 Satz:

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) Seien $a, b, c \in I$ mit $a < c < b$. Dann gilt $f \in R[a, b]$ genau dann, wenn $f \in R[a, c]$ und $f \in R[c, b]$. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx.$$

(2) Sei $f \in R[a, b]$ für alle $[a, b] \subset I$, und sei $c \in I$. Setzt man

$$F : I \to \mathbb{R}, y \mapsto F(y) := \int_c^y f(x)\,dx,$$

wobei $\int_c^y f(x)\,dx := -\int_y^c f(x)\,dx$ für $y < c$ und $\int_c^c f(x)\,dx := 0$ gesetzt ist, so gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

[(2) folgt aus (1). Zum Beweis von (1) sei zunächst $f \in R[a, b]$ und $\varepsilon > 0$. Wir finden eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$. Wegen Satz 11.2(1) können wir davon ausgehen, dass $c \in Z$ gilt (Ansonsten verfeinern wir Z durch Hinzuname des Punktes c). Setzen wir dann $Z_1 := Z \cap [a, c]$ und $Z_2 := Z \cap [c, b]$, so gilt für $k = 1, 2$:

$$S_f(Z_k) - s_f(Z_k) \leq S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon.$$

Ist umgekehrt $f \in R[a,c]$ und $f \in R[c,b]$, sowie $\varepsilon > 0$, so finden wir Zerlegungen Z_1 von $[a,c]$ und Z_2 von $[c,b]$ mit $S_f(Z_k) - s_f(Z_k) < \varepsilon/2$ für $k = 1,2$. Wir setzen $Z := Z_1 \cup Z_2$ und erhalten

$$S_f(Z) - s_f(Z) = S_f(Z_1) + S_f(Z_2) - s_f(Z_1) - s_f(Z_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt also wieder mithilfe von 11.6. ∎

Beispiel: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

11.11 Riemann-Summen

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung, sowie I_j, M_j, m_j wie in 11.1. Dann heißt

$$|Z| := \max\{|I_j| : j = 1, 2, \dots, n\}$$

die *Feinheit* von Z.

Ein n-Tupel $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ heißt *passender Zwischenvektor*, wenn $\xi_j \in I_j$ für jedes $j = 1, \dots, n$ gilt. Für einen solchen heißt

$$\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)|I_j|$$

eine *Riemannsche Summe*. Wegen $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j$ gilt dabei $s_f(Z) \leq \sigma_f(Z,\xi) \leq S_f(Z)$.

Satz: Sei $f \in R[a,b]$ und $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_m| \to 0$, sowie $(\xi^{(m)})$ eine Folge von passenden Zwischenvektoren. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_f(Z_m, \xi^{(m)}) = \int_a^b f \, dx.$$

(ohne Beweis)

Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung: Haben alle Folgen Riemannscher Summen, deren Feinheit gegen Null geht, denselben Limes $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx = \alpha$.

11.12 Satz:

Seien $f, g \in R[a,b]$ und $D := f([a,b])$.

(1) Sei $L \geq 0$ und $h : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$\forall s, t \in D : |h(t) - h(s)| \leq L|t - s|. \tag{L}$$

Dann gilt $h \circ f \in R[a,b]$.

(2) Es ist $|f| \in R[a,b]$ und

$$|\int_a^b f\,dx| \leq \int_a^b |f|\,dx \qquad \text{(Dreiecksungleichung für Integrale).}$$

(3) Es ist $fg \in R[a,b]$.

(4) Ist $c > 0$ und gilt $|f(x)| \geq c$ für alle $x \in [a,b]$, so ist $1/f \in R[a,b]$.

Bemerkung: Eine Funktion h mit (L) heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L. Eine solche Funktion ist insbesondere stetig (sogar gleichmäßig stetig).

Beweis: (1) Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung und I_j, M_j, m_j wie in 11.1, sowie

$$\tilde{M}_j := \sup h \circ f(I_j) \quad \text{und} \quad \tilde{m}_j := \inf h \circ f(I_j).$$

Wie im Beweis von 11.9 zeigt man

$$\tilde{M}_j - \tilde{m}_j = \sup\{\underbrace{h(f(x)) - h(f(\tilde{x}))}_{\leq L|f(x) - f(\tilde{x})|} : x, \tilde{x} \in I_j\} \leq L(M_j - m_j).$$

Man erhält $S_{h\circ f}(Z) - s_{h\circ f}(Z) \leq L(S_f(Z) - s_f(Z))$, und $h \circ f \in R[a,b]$ folgt mit Hilfe von 11.6.

(2) Wende (1) an auf $h(t) = |t|$. Es gilt $||t| - |s|| \leq |t - s|$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$, dh (L) gilt mit $L = 1$. Also ist $|f| \in R[a,b]$. Weiter ist

$$|\int_a^b f\,dx| = \max\{\int_a^b \underbrace{f}_{\leq|f|}\,dx, \int_a^b \underbrace{(-f)}_{\leq|f|}\,dx\} \leq \int_a^b |f|\,dx.$$

(3) Wegen $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ reicht es, $f^2 \in R[a,b]$ zu zeigen. Da f beschränkt ist, gibt es $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \leq \gamma$ für alle $x \in [a,b]$. Also gilt $D \subseteq [-\gamma, \gamma]$. Für $s, t \in D$ gilt somit:

$$|t^2 - s^2| = |t + s||t - s| \leq (|t| + |s|)|t - s| \leq 2\gamma|t - s|.$$

Mit $h(t) = t^2$ in (1) folgt $f^2 \in R[a,b]$.

(4) Nach Voraussetzung gilt $D \subset (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$. Somit ist für $t, s \in D$:

$$\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{s}\right| = \frac{|s - t|}{|s||t|} \leq \frac{1}{c^2}|t - s|.$$

Mit $h(t) := 1/t$ in (1) folgt die Behauptung. ∎

11.13 Satz:

Sei $f \in R[a,b]$ und $F : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $y \mapsto F(y) := \int_a^y f(x)\,dx$ (vgl. 11.10(2)) sowie $x_0 \in [a,b]$. Dann gilt

(1) F ist stetig in x_0, d.h.,

$$\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx \to \int_a^{x_0} f(x)\,dx \quad (h \to 0).$$

(2) Ist f stetig in x_0, so ist F differenzierbar in x_0 mit $F'(x_0) = f(x_0)$, dh., es gilt

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \to f(x_0) \quad (h \to 0).$$

Hierbei betrachten wir für $x_0 = a$ nur $h \to 0+$ und für $x_0 = b$ nur $h \to 0-$.

Beweis: (1) Wir wählen $\gamma > 0$ mit $|f(x)| \le \gamma$ für alle $x \in [a,b]$. Es gilt dann für $h \neq 0$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} & |\int_a^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx| = |\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx| \\ \le \; & \int_{\min\{x_0,x_0+h\}}^{\max\{x_0,x_0+h\}} \underbrace{|f(x)|}_{\le\gamma}\,dx \le \gamma|h| \to 0 \; (h \to 0). \end{aligned}$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x_0 stetig ist, finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für $|h| < \delta$ mit $x_0, x_0 + h \in [a,b]$ gilt wegen $h^{-1}\int_{x_0}^{x_0+h} 1\,dx = 1$:

$$\begin{aligned} & |\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - f(x_0)| = |\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx| \\ \le \; & \frac{1}{|h|}\int_{\min\{x_0,x_0+h\}}^{\max\{x_0,x_0+h\}} \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\le\varepsilon}\,dx \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Eine direkte Folgerung aus obigen Satz ist der

11.14 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(1) Ist $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G' = f$ auf $[a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) \ \left(=: G(x)|_a^b =: [G(x)]_a^b\right).$$

(2) Setzt man $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) := \int_a^x f(\xi)\,d\xi$, so ist F auf $[a, b]$ differenzierbar mit $F' = f$ auf $[a, b]$.

Beweis: (2) haben wir oben in 11.13 gezeigt.

(1) folgt aus (2): Nach Satz 11.10 ist $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Da $F' = f = G'$ ist, gilt nach dem MWS der Differentialrechnung $G = F + c$ für eine Konstante c, und demnach ist $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$. ∎

Beispiele: (1) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$, $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$, $\int_0^b e^x\,dx = e^b - 1$. Insbesondere haben wir $\int_0^\pi \sin x\,dx = 2$, $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ und $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$.

(2) Ist $\gamma \neq 0$, so ist ferner $\int_a^b \cos(\gamma x)\,dx = \gamma^{-1}\big(\sin(\gamma b) - \sin(\gamma a)\big)$, $\int_a^b \sin(\gamma x)\,dx = \frac{\cos(\gamma a)-\cos(\gamma b)}{\gamma}$, $\int_a^b e^{\gamma x}\,dx = \frac{e^{\gamma b}-e^{\gamma a}}{\gamma}$.

Insbesondere ist für $\gamma > 0$: $\int_0^b e^{-\gamma x}\,dx = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma b})$ und $\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\gamma x}\,dx = 1/\gamma$.

Als weitere Anwendung notieren wir: Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^b \sin x \cos x\,dx = \frac{-1}{2} \int_0^b \frac{d}{dx}(\cos(x))^2\,dx = \frac{1}{2}(1 - \cos(b)^2),$$

insbesondere $\int_0^\pi \sin x \cos x\,dx = 0$ und $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x\,dx = 1/2$.

11.15 Stammfunktionen

Definition: Sind $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei F auf I differenzierbar ist mit $F' = f$ auf I, so heißt F eine *Stammfunktion von f auf I*.

Bemerkung: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 11.14 besagt, daß man zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen Stammfunktionen verwenden kann und das jede stetige Funktion auch Stammfunktionen besitzt. Für eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$ schreibt man deshalb auch $\int f(x)\,dx$ (*unbestimmtes Integral*).

Zwei Stammfunktionen von $f : I \to \mathbb{R}$ unterscheiden sich nach dem Mittelwertsatz nur durch eine additive Konstante.

Beispiel: (1) Auf $J = \mathbb{R}$ gilt $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine feste Konstante ist.

(2) Auf $J = (-\infty, 0)$ oder $J = (0, \infty)$ gilt $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Für $x >$ ist dies klar. Für $x < 0$ ist nach Kettenregel $\frac{d}{dx} \ln(|x|) = \frac{1}{|x|}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Definition: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar auf* I, falls f auf I differenzierbar ist und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist. Wir schreiben dafür auch $f \in C^1(I)$.

Bemerkung: Ist $f \in C^1(I)$, so gilt $\int f' \, dx = f$ auf I.

Die beiden folgenden Integrationsregeln ergeben sich über den Hauptsatz aus Differentiationsregeln.

11.16 Partielle Integration

Seien $f, g \in C^1([a, b])$. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

Bemerkung: Mit Hilfe der Stammfunktionsschreibweise (unbestimmtes Integral) schreibt man dies auch oft als

$$\int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx \quad \text{auf } [a, b].$$

Beweis: Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ auf I. Somit hat $f'g + fg'$ die Stammfunktion fg auf I, woraus die Behauptungen folgen. Oder ausführlicher, mit Hilfe des Hauptsatzes 11.14 und der Linearität des Integrals,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= \int_a^b \big((f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\big) \, dx \\
&= \int_a^b (f(x)g(x))' \, dx - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\
&= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\
&= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiele: (1) $\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{e^x}_{f}\,dx = xe^x - e^x.$

(2) $\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\ln x}_{g}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{\ln x}_{g} - \int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = x\ln x - x.$

11.17 Integration durch Substitution:

Seien $I = [a,b], J = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in C^1(J)$ mit $g(J) \subseteq I$. Dann ist die Verküpfung $f \circ g : J \to \mathbb{R}$ definiert und es gilt

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx.$$

Bemerkung: (1) Als unbestimmtes Integral schreibt man dies oft auch als

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=g(t)} \quad \text{auf } J.$$

(2) Die Umkehrbarkeit der Funktion $g : J \to I$ ist für die Gültigkeit der Substitutionsregel *nicht* erforderlich. Falls zusätzlich vorausgesetzt wird, daß $g : J \to I$ bijektiv ist, so existiert $g^{-1} : I \to J$ und man kann die Substitutionsregel in der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt$$

schreiben. Dies wird als unbestimmtes Integral auch oft als

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt|_{t=g^{-1}(x)} \quad \text{auf } g(J)$$

geschrieben.

Beweis: Wähle eine Stammfunktion F von f auf I. Dann ist wegen der Kettenregel $G := F \circ g$ eine Stammfunktion von $h := (F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'$ auf J. Also ist nach dem Hauptsatz

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = \int_a^b h(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Andererseits erhält man wegen $F' = f$ auch

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$

$\blacksquare$

Merkregel: Ist $y = y(x)$ eine differenzierbare Funktion, so schreibt man für die Ableitung y' auch $\frac{dy}{dx}$. Substituiere nun in $\int f(x)\,dx$: $x = g(t)$, d.h. fasse x als Funktion von t auf. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ und man erhält (formal!) "$dx = g'(t)\,dt$" (dies ist nur eine Schreibweise, da "dx" oder "dt" hier **keine mathematische Bedeutung** tragen).

Beispiele: (1) $\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx$, substituiere $t = e^x$, also $x = \ln t$ $(= g(t))$, welches strikt monoton und damit umkehrbar ist. Dann ist $g'(t) = 1/t$, $dx = dt/t$ und $x = 0 = \ln 1$ und $x = 1 = \ln e$ (d.h., $g^{-1}(0) = 1$ und $g^{-1}(1) = e$, oder kurz: aus den Integrationsgrenzen $x : 0 \to 1$ ergeben sich sich die Integrationsgrenzen $t : 1 \to e$). Wir erhalten:

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx = \int_{\ln^{-1}(0)}^{\ln^{-1}(1)} \frac{e^{2\ln t}+1}{e^{\ln t}}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e (1+t^{-2})\,dt = (t-t^{-1})\Big|_1^e = e - 1/e.$$

(2) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, substituiere $x = \sin t$. Da $\sin' = \cos > 0$ auf $[0,\pi/2)$ ist, ist $\sin : [0,\pi/2] \to [0,1]$ invertierbar. Dann ist $dx = \cos t\,dt$ und aus den Integrationsgrenzen $x : 0 \to 1$ ergeben sich die Integrationsgrenzen $t : 0 \to \pi/2$. Wir erhalten

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=|\cos t|}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt,$$

da $\cos \geq 0$ auf $[0,\pi/2]$ ist. Nun schreiben wir

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1,$$

also $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$, und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} 1\,dt + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos(2t)\,dt}_{=0}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Das ist der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit Radius 1.

12 Uneigentliche Integrale

Die folgenden Vereinbarungen sollen für das gesamte Kapitel gelten:

> Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei f über jedes Intervall $[a, b] \subset I$ integrierbar.
>
> Es seien stets $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < \beta$ und $\alpha < b$.

12.1 Konvergenz uneigentlicher Integrale

Definition: Sei $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha, b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\int_a^\beta f(x)\, dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\, dx$) heißt *konvergent*, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\, dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\, dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\, dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\, dx \quad \text{(bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\, dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\, dx).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt *divergent*.

Beispiele: (1) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für jedes $r > 1$:

$$\int_1^r \frac{1}{x^\gamma}\, dx = \begin{cases} \ln r & , \gamma = 1 \\ \frac{r^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} & , \gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_1^\infty x^{-\gamma}\, dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma > 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(\gamma - 1)$.

(2) Für $r > 0$ gilt

$$\int_0^r \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan r \to \frac{\pi}{2} \quad (r \to \infty).$$

Also ist $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$ konvergent und $= \pi/2$.

(3) Sei $\gamma > 0$. Dann gilt für $r \in (0, 1)$:

$$\int_r^1 \frac{1}{x^\gamma}\, dx = \begin{cases} -\ln r & , \gamma = 1 \\ \frac{1-r^{1-\gamma}}{1-\gamma} & , \gamma \neq 1 \end{cases},$$

also ist $\int_0^1 x^{-\gamma}\, dx$ konvergent genau dann, wenn $\gamma < 1$ ist. In diesem Fall ist das Integral $= 1/(1 - \gamma)$.

(4) Analog zu (2): $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ ist konvergent und $= \pi/2$.

Definition: Sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt *konvergent*, falls es ein $c \in (\alpha, \beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$ **beide** konvergent sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$.

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt *divergent*, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.

Beispiele: (5) Sei $\gamma > 0$. Nach den Beispielen (1) und (3) ist $\int_0^\infty x^{-\gamma}\,dx$ divergent.

(6) Nach den Beispielen (2) und (4) ist $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konvergent und $= \pi$.

(7) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x}\,dx$ ist *divergent*, da $\infty_c^\infty \frac{1}{x}\,dx$ für alle $c \in \mathbb{R}$ divergiert. *Trotzdem* ist $\lim_{\tau\to\infty} \underbrace{\int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{x}\,dx}_{=0}$ konvergent!

Bemerkung: Wir betrachten im folgenden nur den Fall von Funktionen $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$. Entsprechendes gilt jeweils auch für Funktionen $f : (\alpha, b] \to \mathbb{R}$ bzw. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$.

12.2 Cauchykriterium

Satz (ohne Beweis): $\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c = c(\varepsilon) \in (a, \beta)$ gibt mit

$$\forall u, v \in (c, \beta) : \left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist konvergent.

Zunächst beachten wir $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0+$, weshalb das Integral bei 0 nicht uneigentlich ist. Für $v > u > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\,dx| &= |\int_u^v \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'}\,dx| \\
&= |-\frac{\cos x}{x}|_u^v - \int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\,dx| \\
&\le \frac{|\cos u|}{u} + \frac{|\cos v|}{v} + \int_u^v \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx \\
&\le \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + [-\frac{1}{x}]_u^v = \frac{2}{u}.
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $v > u > 2/\varepsilon$ gilt dann $|\int_u^v \frac{\sin x}{x}\,dx| \leq 2/u < \varepsilon$.

12.3 Absolute Konvergenz uneigentlicher Integrale

Definition: $\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt *absolut konvergent*, falls $\int_a^\beta |f(x)|\,dx$ konvergent ist.

Beispiel: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ist **nicht** absolut konvergent. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nämlich

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \underbrace{\int_0^\pi |\sin x|\,dx}_{=2}\,\frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

also für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)\pi} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Mithilfe von 12.2 kann man zeigen (ähnlich wie bei Reihen, vgl. 7.3 und 7.5):

12.4 Satz:

(1) Ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergent und

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx.$$

(2) **Majorantenkriterium:**
Ist $|f| \leq g$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent.
(3) **Minorantenkriterium:**
Ist $f \geq g \geq 0$ auf $[a,\beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent.

Beispiele: (1) $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$; setze $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}$ und $g(x) := x^{-3/2}$. Dann gilt $|f(x)| = f(x) \leq g(x)$ für jedes $x \geq 1$. Da $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ konvergiert, konvergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$ und es gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \int_1^\infty g(x)\,dx = 2.$$

(2) $\int_1^\infty \underbrace{\frac{x}{x^2+7x}}_{=:f(x)}\,dx$; setze $g(x) = 1/x$. Dann gilt $f(x)/g(x) = \frac{x^2}{x^2+7x} \to 1$ $(x \to \infty)$ und wir finden $c \geq 1$ mit $f/g \geq 1/2$ auf $[c,\infty)$, dh es gilt $f(x) \geq g(x)/2 = (2x)^{-1}$ für alle

$x \geq c$ (man kann hier $c = 7$ nehmen, wie man direkt einsieht). Da $\int_c^\infty (2x)^{-1}\,dx$ divergiert, divergiert auch $\int_c^\infty f(x)\,dx$, und somit divergiert auch $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Warnung: Sind $\int_a^\beta f\,dx$ und $\int_a^\beta g\,dx$ konvergent, so muss $\int_a^\beta fg\,dx$ **nicht** konvergieren!
Beispiel: $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x \in [0,1)$, $\alpha = 0, \beta = 1$.