Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dipl.-Math. Matthias Uhl

WS 2011/12
11.11.2011

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Ergänzung zur 4. Übung

Behauptung:
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $\sqrt{k}$ entweder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl.

Denn:
Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass dann $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehmen wir an, dass die Aussage $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ falsch ist. Es gelte also $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, d.h. es existieren $m, n \in \mathbb{N}$ (wegen $\sqrt{k} > 0$) mit $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$. Daher ist die Menge

$$M := \left\{ n \in \mathbb{N} \,:\, \text{es gibt } m \in \mathbb{N} \text{ mit } \sqrt{k} = \tfrac{m}{n} \right\}$$

nichtleer; sie besitzt also aufgrund des Wohlordnungsprinzips ein kleinstes Element $n_0 := \min M$. Nach Definition von M muss es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ geben mit $\sqrt{k} = \frac{m_0}{n_0}$.
Sei $q := \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ die kleinste ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\sqrt{k}$ ist. Aus $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ folgt $q < \sqrt{k}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{k} - 1 < q < \sqrt{k} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{m_0}{n_0} - 1 < q < \frac{m_0}{n_0} \quad \Longleftrightarrow \quad m_0 - n_0 < n_0 q < m_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -n_0 < n_0 q - m_0 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n_0 > m_0 - n_0 q > 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\sqrt{k} = \frac{m_0}{n_0} = \frac{m_0(\sqrt{k} - q)}{n_0(\sqrt{k} - q)} = \frac{(n_0\sqrt{k})\sqrt{k} - m_0 q}{n_0\sqrt{k} - n_0 q} = \frac{n_0 k - m_0 q}{m_0 - n_0 q}\,.$$

Offenkundig ist $n_0 k - m_0 q \in \mathbb{Z}$. Wegen $\sqrt{k} > 0$ und $m_0 - n_0 q > 0$ ergibt sich $n_0 k - m_0 q \in \mathbb{N}$. Wegen $m_0 - n_0 q \in \mathbb{Z}$ und $m_0 - n_0 q > 0$ gilt $m_0 - n_0 q \in \mathbb{N}$. Folglich liegt $m_0 - n_0 q$ in M. Wie zuvor nachgerechnet ist $m_0 - n_0 q < n_0$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von n_0 als kleinstem Element von M. Darum ist die getroffene Annahme $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$ falsch und ihre Negation $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wahr.