

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik**

Ergänzung zur 12. Übung

Berechnung von $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{3}$

Laut Vorlesung gilt jedes $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\sin x > 0 \quad \text{und} \quad \cos x > 0. \quad (1)$$

Durch mehrfache Anwendung der Additionstheoreme für Cosinus und Sinus erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6} \\ &= \cos^3 \frac{\pi}{6} - 3 \cos \frac{\pi}{6} \sin^2 \frac{\pi}{6} \\ &= \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos^2 \frac{\pi}{6} - 3 \sin^2 \frac{\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

woraus aufgrund von $\cos \frac{\pi}{6} \neq 0$ (vgl. (1))

$$\cos^2 \frac{\pi}{6} - 3 \sin^2 \frac{\pi}{6} = 0 \quad (2)$$

folgt. Da $\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1$ gilt, ergibt sich hieraus $4 \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1$, also $\frac{1}{2} = |\sin \frac{\pi}{6}| \stackrel{(1)}{=} \sin \frac{\pi}{6}$. Einsetzen in Gleichung (2) führt auf $\cos^2 \frac{\pi}{6} = 3 \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$, woraus sich $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ wegen (1) ergibt. Aus den Additionstheoremen folgt weiter

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3}, \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den in der Vorlesung berechneten Funktionswerten von Cosinus und Sinus ergibt sich folgende Tabelle:

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\sin x$ | $\frac{1}{2} \sqrt{0}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{1}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{4}$ |
| $\cos x$ | $\frac{1}{2} \sqrt{4}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{1}$ | $\frac{1}{2} \sqrt{0}$ |