

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Der Ausdruck  $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$  ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also  $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Der maximale Definitionsbereich von  $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$  ist ebenfalls  $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Polynome wie  $f_3(x) = x^2 + x + 1$  sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, also  $D_3 = \mathbb{R}$ .

Zur Bestimmung der Bildmenge  $f_1(D_1)$  von  $f_1$  setzen wir die Abbildung  $f_1$  aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl  $s$  als auch  $t_{-1}$  bijektiv [ $s$  injektiv:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$ ;  $s$  surjektiv: Sei  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für  $x := 1/y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt  $s(x) = s(1/y) = y$ .  $t_{-1}$  injektiv:  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$ ;  $t_{-1}$  surjektiv: Sei  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für  $x := y + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  gilt  $t_{-1}(x) = t_{-1}(y + 1) = (y + 1) - 1 = y$ .] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist  $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  bijektiv. ( $s \circ t_{-1}$  ist erlaubt, weil  $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $s$  hierauf definiert ist!) Da für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x - 1) = \frac{1}{x - 1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für  $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$  ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \quad \text{für } x \neq 1. \quad (1)$$

Wegen

$$\begin{aligned} y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : y = f_2(x) \stackrel{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

gilt  $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Bei  $f_3(x) = x^2 + x + 1$  ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$  ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen  $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = [0, \infty)$ . Für die Bildmenge von  $f_3$  erhalten wir

$$f_3(D_3) = \left\{y \in \mathbb{R} : y \geq \frac{3}{4}\right\} = \left[\frac{3}{4}, \infty\right).$$

- b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass  $f_1$  injektiv ist. Alternativ:  $f_1$  ist injektiv, denn für alle  $x, y \in D_1$  mit  $x \neq y$  gilt

$$x \neq y \Leftrightarrow x - 1 \neq y - 1 \stackrel{x, y \neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x - 1} \neq \frac{1}{y - 1} \Leftrightarrow f_1(x) \neq f_2(y).$$

Die Abbildung  $f_2$  ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von  $f_1$  und (1), denn für alle  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  gilt

$$x \neq y \Leftrightarrow f_1(x) \neq f_1(y) \Leftrightarrow 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \Leftrightarrow f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen  $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$  ist  $f_3$  nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge  $Y$  echt größer als die Bildmenge  $f(X)$  ist. Wir betrachten daher die Abbildung  $f : X \rightarrow f(X)$  (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also  $f_i : D_i \rightarrow f_i(D_i)$ .

Die Umkehrabbildung von  $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen  $t_{-1}$  und  $t_1$  einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x - 1) = (x - 1) + 1 = x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $s$  ist wegen  $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zu sich selbst invers, d.h.  $s^{-1} = s$ . Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \rightarrow D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1 + y}{y}.$$

Zur Bestimmung von  $(f_2)^{-1}$  lösen wir die Gleichung  $f_1(x) = y$  nach  $x$  auf (hier sind  $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{x + 1}{x - 1} = y &\Leftrightarrow x + 1 = y(x - 1) \Leftrightarrow x(1 - y) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-y - 1}{1 - y} = \frac{y + 1}{y - 1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist  $f_2$  ihre eigene Umkehrabbildung:  $(f_2)^{-1} = f_2$ .

- c) Erlaubt sind genau die Kompositionen  $f_i \circ f_j$  mit  $f_j(D_j) \subset D_i$ . Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen  $2 \in f(D_3)$  und  $f_1(2) = 1$ , aber  $1 \notin D_2$  ist  $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$  nicht erlaubt.

- d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) = \frac{1}{\frac{x + 1}{x - 1} - 1} = \frac{1}{\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1}} = \frac{1}{\frac{2}{x - 1}} = \frac{x - 1}{2}.$$

## Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\begin{aligned}|x - 4| = |x + 1| &\Leftrightarrow (x - 4)^2 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1 \\ &\Leftrightarrow 10x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen  $x \in \mathbb{R}$ , die denselben Abstand zu 4 wie zu  $-1$  haben, d.h.  $x$  liegt genau in der Mitte:  $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$ .

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung  $x \in (-\infty, -1]$ ,  $x \in (-1, 4]$ ,  $x \in (4, \infty)$  durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

b)  $|2x| > |5 - 2x|$  besagt, dass notwendig  $x \neq 0$  sein muss. Für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt aber

$$\begin{aligned}|2x| > |5 - 2x| &\Leftrightarrow \left| \frac{5 - 2x}{2x} \right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \underbrace{\frac{5 - 2x}{2x}}_{= \frac{5}{2x} - 1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5}x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned}|2 - |2 - x|| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2 - |2 - x| \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -|2 - x| \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |2 - x| \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - x \leq 3 \text{ oder } -3 \leq 2 - x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 1 \text{ oder } -5 \leq -x \leq -3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ oder } 3 \leq x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [3, 5].\end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall:  $x \in (-\infty, -1)$ . Mit  $|x + 1| = -(x + 1)$  und  $|x - 1| = -(x - 1)$  ergibt sich

$$|x + 1| + |x - 1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow -2x > 2 \Leftrightarrow x < -1.$$

2. Fall:  $x \in [-1, 1)$ . Hier ist  $|x + 1| = x + 1$  und  $|x - 1| = -(x - 1)$ , also

$$|x + 1| + |x - 1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung:  $2 > 2$ . Diese ist unlösbar.

3. Fall:  $x \in [1, \infty)$ . Wegen  $|x + 1| = x + 1$  und  $|x - 1| = x - 1$  folgt

$$|x + 1| + |x - 1| = 2x$$

und damit

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x + 1| + |x - 1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \text{ oder } x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall:  $x < 0$ . Dann ist  $|x| = -x$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1-x) \Leftrightarrow 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x\left(x^2 - x + \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < -4x \underbrace{\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]}_{\geq \frac{1}{2} > 0} \\ &\Leftrightarrow 0 < -4x \Leftrightarrow x < 0. \end{aligned}$$

2. Fall:  $x \geq 0$ . Dann ist  $|x| = x$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 &\Leftrightarrow 3x < 4x^2(1+x) \Leftrightarrow 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 0 < 4x\left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 0 < 4x\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1\right] \\ &\Leftrightarrow 4x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left|x + \frac{1}{2}\right| > 1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } x + \frac{1}{2} < -1\right) \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ und } \left(x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < -\frac{3}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Demzufolge gilt  $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$  genau für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x < 0$  oder  $x > \frac{1}{2}$ .

f) Auf keinen Fall kommt  $x = 1$  in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit  $1 - x$ . Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst  $1 - x > 0$ , also  $x < 1$ . Multiplikation mit  $1 - x$  liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 &\Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \geq 1-x \Leftrightarrow 2x - 2x^2 + 1 \geq 1-x \\ &\Leftrightarrow 3x - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(3-2x) \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn  $x \geq 0$  und  $3 - 2x \geq 0$  oder aber wenn  $x \leq 0$  und  $3 - 2x \leq 0$ .

$x \geq 0$  und  $3 - 2x \geq 0$  bedeutet  $x \geq 0$  und  $x \leq 3/2$ , also  $0 \leq x \leq 3/2$ . Da wir im 1. Fall nur  $x < 1$  betrachten, ergibt sich also  $0 \leq x < 1$ .

$x \leq 0$  und  $3 - 2x \leq 0$  bedeutet  $x \leq 0$  und  $x \geq 3/2$ , was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei  $1 - x < 0$ , also  $x > 1$ . Dann dreht sich bei Multiplikation mit  $1 - x$  das  $\geq$  um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x(1-x) + 1 \leq 1-x \Leftrightarrow x(3-2x) \leq 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn  $x \geq 0$  und  $3 - 2x \leq 0$  oder aber wenn  $x \leq 0$  und  $3 - 2x \geq 0$ .

$x \geq 0$  und  $3 - 2x \leq 0$  bedeutet  $x \geq 0$  und  $x \geq 3/2$ , also  $x \geq 3/2$ .

$x \leq 0$  und  $3 - 2x \geq 0$  bedeutet  $x \leq 0$  und  $x \leq 3/2$ , also  $x \leq 0$ . Da wir im 2. Fall nur  $x > 1$  betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn  $0 \leq x < 1$  oder  $x \geq 3/2$ .

### Aufgabe 3

- a) Es seien  $x, y \in \mathbb{R}$  beliebig. Wegen  $0 \leq |x + y| \leq |x| + |y|$  (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leq 1 + |x + y| \leq 1 + |x| + |y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1 + |x + y|} \geq \frac{1}{1 + |x| + |y|} \Leftrightarrow -\frac{1}{1 + |x + y|} \leq -\frac{1}{1 + |x| + |y|} \quad (2)$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} = 1 - \frac{1}{1 + |x + y|} \stackrel{(2)}{\leq} 1 - \frac{1}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\geq |x| \geq 0 \\ \Rightarrow 1 + |x| + |y| &\geq 1 + |x| \geq 1 > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{1}{1 + |x|} \\ \stackrel{|x| \geq 0}{\Rightarrow} \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} &\leq \frac{|x|}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche  $x$  und  $y$ ) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x| + |y|}{1 + |x| + |y|} = \frac{|x|}{1 + |x| + |y|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}.$$

- b) Wiederum seien  $x, y \in \mathbb{R}$  beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle  $x - y \geq 0$  und  $x - y < 0$ .

1. Fall:  $x \geq y$ . Dann ist  $|x - y| = x - y$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

2. Fall:  $x < y$ . Dann ist  $|x - y| = -(x - y) = -x + y$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x - y|}{2} &= \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x - y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

### Aufgabe 4

- a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2 - x + 2 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}.$$

Wegen  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$  folgt

$$\min\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da  $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$  nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von  $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$  nicht.

- b) Wir erkennen sofort, dass  $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck  $(-1)^n + \frac{1}{n}$  für ungerade natürliche Zahlen  $\leq 0$  ist. Da  $(-1)^n = 1$  für gerade  $n \in \mathbb{N}$  gilt und  $n \mapsto \frac{1}{n}$  fallend ist, folgern wir aus  $(-1)^n + \frac{1}{n} \leq (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ :  $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$ .

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten:  $\inf B = -1 \notin B$ , d.h. das Minimum von  $B$  existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass  $-1$  überhaupt eine untere Schranke von  $B$  ist. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1.$$

Nun zeigen wir, dass  $-1$  auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke  $K$  gibt, etwa  $K = -1 + \varepsilon$  mit einem  $\varepsilon > 0$ , und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leq (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade  $n$  gilt, folgt für alle ungeraden  $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leq -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt  $-1 = \inf B$ .

- c) Die Menge  $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}$  ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich  $\Gamma$  eine obere Schranke von  $C$ , so müsste

$$\forall x \in (0, 42] : \quad x + \frac{1}{x} \leq \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann  $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$  einsetzen und erhielten:  $\frac{1}{n} + n \leq \Gamma$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Erst recht hätten wir dann  $n \leq \Gamma$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , im Widerspruch dazu, dass  $\mathbb{N}$  nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von  $C$ .

Die Menge  $C$  ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für  $x > 0$  erhalten wir durch Multiplikation mit  $x$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 \geq 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt  $2 \in C$  (man setze  $x = 1$ ). Damit wissen wir: Keine Zahl  $> 2$  kann untere Schranke von  $C$  sein. Also ist  $\inf C = 2$  und wegen  $2 \in C$  folgt auch  $\min C = 2$ .

- d) Wir setzen  $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$ . Offenbar gilt  $x^2(1+x^2)^{-1} \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Außerdem ist  $0 \in D$  (man setze  $x = 0$ ). Damit folgt: Infimum und Minimum von  $D$  existieren, und es ist  $\inf D = \min D = 0$ .

Die Menge  $D$  ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen  $1 + x^2 > 0$  gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leq 1+x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei  $\Gamma < 1$  beliebig; wir wollen zeigen, dass  $\Gamma$  keine obere Schranke von  $D$  ist. Wir müssen also ein  $x \in \mathbb{R}$  finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d.h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große  $x$  offenbar erfüllt.

## Aufgabe 5

Zunächst zum Supremum: Da  $A$  und  $B$  beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren  $\alpha := \sup A$  und  $\beta := \sup B$ . Wir müssen nun zeigen, dass  $A + B$  nach oben beschränkt ist und  $\sup(A + B) = \alpha + \beta$  gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass  $\alpha + \beta$  eine obere Schranke von  $A + B$  ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist. Wählen wir ein beliebiges  $x \in A + B$ , so gibt es  $a \in A$  und  $b \in B$  mit  $x = a + b$ . Da  $\alpha$  bzw.  $\beta$  obere Schranken für  $A$  bzw.  $B$  sind, gilt  $a \leq \alpha$  und  $b \leq \beta$ . Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leq \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass  $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$  ist, d. h.  $A + B$  ist nach oben beschränkt und  $\alpha + \beta$  ist eine obere Schranke.

Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl  $\Gamma < \alpha + \beta$  ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl  $\Gamma < \alpha + \beta$  existiert ein  $x \in A + B$  mit  $x > \Gamma$ . Sei also  $\Gamma < \alpha + \beta$  beliebig. Dann ist  $\Gamma - \alpha < \beta$  und, da  $\beta$  die *kleinste* obere Schranke von  $B$  ist, muss ein  $b \in B$  existieren mit  $b > \Gamma - \alpha$ . Es gilt also  $\alpha > \Gamma - b$ . Daher existiert wiederum ein  $a \in A$  mit  $a > \Gamma - b$ , d. h. es ist  $a + b > \Gamma$ , und wegen  $a + b \in A + B$  kann damit  $\Gamma$  keine obere Schranke von  $A + B$  sein.

Nun zum Infimum: Da  $A$  und  $B$  nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch  $A + B$  nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei  $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ ,  $M$  sei beschränkt. Setze  $-M := \{-x : x \in M\}$ . Dann ist  $\gamma$  genau dann eine untere Schranke von  $M$ , wenn  $-\gamma$  obere Schranke von  $-M$  ist. Hieraus folgt  $\inf(M) = -\sup(-M)$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf(A + B) &= -\sup(-(A + B)) = -\sup((-A) + (-B)) = -(\sup(-A) + \sup(-B)) \\ &= -(-\inf A + (-\inf B)) = \inf A + \inf B. \end{aligned}$$