

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik**

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien die Abbildungen $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_3(x) = x^2 + x + 1.$$

- Bestimmen Sie für jede Abbildung f_i den maximalen Definitionsbereich $D_i \subset \mathbb{R}$ sowie den Bildbereich $f_i(D_i)$.
- Welche Abbildungen sind injektiv? Geben Sie zu den injektiven Abbildungen jeweils die Umkehrabbildung an.
- Welche Kompositionen $f_i \circ f_j$ sind erlaubt? Ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ erlaubt?
- Geben Sie die Abbildung $f_1 \circ f_2$ explizit an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| a) $ x-4 = x+1 ;$ | b) $ 2x > 5-2x ;$ |
| c) $ 2- 2-x \leq 1;$ | d) $ x+1 + x-1 > 2;$ |
| e) $\frac{3x}{1+ x } < 4x^2;$ | f) $2x + \frac{1}{1-x} \geq 1.$ |

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|};$

Tipp: Verwenden Sie $\frac{a}{1+a} = \frac{a+1-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ für $a \neq -1$.

b) $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ und $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$

Aufgabe 4

Entscheiden Sie jeweils, ob die Mengen Supremum, Infimum, Maximum bzw. Minimum besitzen. Bestimmen Sie gegebenenfalls diese Werte.

- | | |
|--|--|
| a) $\{x^2 - x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$ | b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $\{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leq 42\}$ | d) $\{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$ |

Aufgabe 5

Die Mengen A und B seien beschränkte, nichtleere Teilmengen von \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass dann auch $A + B := \{a + b : a \in A \text{ und } b \in B\} = \{x : \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}$ eine beschränkte Menge ist und

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \text{sowie} \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

gelten.