Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2013/14
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik and Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Wegen $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ ist $f(0) = 0$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$

$$f(-x) = -f(x). \tag{1}$$

Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt nach $(p - 1)$-maliger Verwendung der Voraussetzung

$$f(px) = pf(x).$$

Hieraus folgt mit (1)

$$f(px) = pf(x) \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Für alle $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich damit

$$f(x) = f(q\,\tfrac{1}{q}x) = q\,f(\tfrac{1}{q}x) \quad \Rightarrow \quad f(\tfrac{1}{q}x) = \tfrac{1}{q}\,f(x). \tag{3}$$

Sei nun $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$f(rx) = f(\tfrac{p}{q}x) \overset{(2)}{=} pf(\tfrac{1}{q}x) \overset{(3)}{=} \tfrac{p}{q}f(x) = rf(x).$$

b) Sei f stetig in 0, d.h. für alle reellen Folgen (x_n) mit $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt $f(x_n) \to f(0)$ $(n \to \infty)$.

Beh.: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, d.h. f ist stetig in y für alle $y \in \mathbb{R}$.

Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig und (x_n) sei eine reelle Folge mit $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Zu zeigen ist $f(x_n) \to f(y)$ $(n \to \infty)$. Es gilt

$$f(x_n) - f(y) \overset{(1)}{=} f(x_n) + f(-y) = f(x_n + (-y)) = f(x_n - y) \xrightarrow{n\to\infty} f(0) \overset{\text{a)}}{=} 0,$$

denn $x_n - y \to 0$ $(n \to \infty)$ und f ist im Nullpunkt stetig nach Voraussetzung. Also folgt

$$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(y),$$

d.h. f ist stetig in y.

c) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to x$ für $n \to \infty$ (vgl. Beispiel (5) in Abschnitt 6.2). Aufgrund der Stetigkeit von f ergibt sich

$$f(r_n) \to f(x) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Andererseits ist

$$f(r_n) = f(r_n \cdot 1) \overset{\text{a)}}{=} r_n f(1) \to xf(1) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $f(x) = xf(1)$.

Aufgabe 2

Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Gemäß Satz 8.9 ist f stetig in 1 genau dann, wenn

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1+} f(x)$$

gilt. Nun haben wir

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2 + a = f(1) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = 2 - 1 = 1\,;$$

also ist f genau für $a = -1$ stetig.

Aufgabe 3

a) Das Additionstheorem $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x\,.$$

b) Ebenso folgt aus $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x\,,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\,, \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1\,. \end{cases}$$

c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b\,.$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x + y)$ und $b := \frac{1}{2}(x - y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a + b) + \sin(a - b) \\ &= \big(\sin a \cos b + \cos a \sin b\big) + \big(\sin a \cos b - \cos a \sin b\big) = 2 \sin a \cos b\,. \end{aligned}$$

d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x + y)$ und $b := \frac{1}{2}(x - y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ &= \big(\cos a \cos b - \sin a \sin b\big) + \big(\cos a \cos b + \sin a \sin b\big) = 2 \cos a \cos b\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1 + z - 1) = \sin(1)\cos(z - 1) + \cos(1)\sin(z - 1) \\ &= \sin(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(z - 1)^{2k} + \cos(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!}(z - 1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\, \frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\, \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞.

b) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ erhalten wir unter Verwendung der Identität $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$

$$f(z) = \frac{2/3}{3+(z-2)} + \frac{1/3}{-3-2(z-2)} = \frac{2/9}{1+(z-2)/3} + \frac{-1/9}{1+2(z-2)/3}\,.$$

Für $\frac{1}{3}|z-2| < 1$ gilt

$$\frac{1}{1+(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n$$

und für $\frac{2}{3}|z-2| < 1$ ist

$$\frac{1}{1+2(z-2)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n\,. \qquad (*)$$

Hiermit folgt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{3}{2}$

$$f(z) = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{3}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2(z-2)}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

mit $a_n = \frac{2}{9}(-\frac{1}{3})^n - \frac{1}{9}(-\frac{2}{3})^n = (-\frac{1}{3})^{n+2}(2-2^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Konvergenzradius beträgt $\frac{3}{2}$, weil die geometrische Reihe in $(*)$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\frac{2}{3}|z-2| \geqslant 1$ divergiert.

Bemerkung: Die Darstellung $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ kann man auf die folgende Weise erhalten ($\rightarrow$ Partialbruchzerlegung): Wegen $1-z-2z^2 = (1+z)(1-2z)$ machen wir den Ansatz

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z}$$

und müssen die Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Die rechte Seite dieser Gleichung liefert

$$\frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-2z} = \frac{a(1-2z)+b(1+z)}{(1+z)(1-2z)} = \frac{a+b+(-2a+b)z}{1-z-2z^2}\,.$$

Die Darstellung gelingt also, wenn $a+b=1$ und $-2a+b=-1$ sind. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

c) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (vgl. Aufgabe 3 b)) ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, 2^{2k} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,2^n\,, & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ gerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 5

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ [Diese Gleichheit erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel 4.11 (1) oder der Polynomdivision $(1-x^3) : (1-x)$.]

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{x+2}{1+x+x^2}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1} -\frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{1+2}{1+1+1^2} = -\frac{3}{3} = -1\,.$$

b) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ [wieder geometrische Summenformel 4.11 (1) oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

c) Mit der Reihenentwicklung von $\sin x$ hat man für jedes $x \neq 0$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots)}{x(x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \ldots}\,,$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen (vgl. Satz 8.7)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \ldots}{x^3 - \frac{1}{3!}x^5 + \ldots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \ldots} = \frac{\frac{1}{3!}}{1} = \frac{1}{6}\,.$$