

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- a) Es gilt $f(rx) = rf(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$.
- b) Ist f stetig in 0, so ist f stetig auf \mathbb{R} .
- c) Ist f stetig auf \mathbb{R} , so gilt $f(x) = xf(1)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b, & x \leq 1, \\ c - x, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist und zudem $f(0) = f(2) = 0$ gilt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Formeln für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- b) $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$
- c) $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
- d) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0 . Wie groß ist der Konvergenzradius?

- a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$
- b) $f(z) = \frac{1-z}{1-z-2z^2}, \quad z_0 = 2$
- c) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie in **a)** und in **c)** die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus. In **b)** hilft $\frac{1-z}{1-z-2z^2} = \frac{2/3}{1+z} + \frac{1/3}{1-2z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$ weiter.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$