Karlsruhe Institut für Technologie(KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1]\setminus\{0\}$ stetig. Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)|\leqslant 1$ für alle $x\in[-1,1]$: Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$|f(x)|\overset{(1)}{=}\frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant0}}\leqslant|x|\leqslant1.$$

Wegen $f(0)=0$ ist $|f(x)|\leqslant1$ für alle $x\in[-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1])\subset[-1,1]$. Nun zeigen wir $[-1,1]\subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0\in[-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1)=-1$ und $f(1)=1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0\in[-1,1]$ mit $y_0=f(x_0)\in\{f(x):\ x\in[-1,1]\}=f([-1,1])$. Da $y_0\in[-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1]\subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1])=[-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X,Y Mengen und $f:X\to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y=f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x=g(y)$ zu bringen (wobei $x\in X$, $y\in Y$ und $g:Y\to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
y=f(x)\quad&\Longleftrightarrow\quad y=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\quad\Longleftrightarrow\quad 1-xy=\sqrt{1-x^2}\\
&\overset{1-xy\geqslant0}{\Longleftrightarrow}\quad 1-2xy+x^2y^2=1-x^2\quad\Longleftrightarrow\quad x^2(1+y^2)=2xy\\
&\overset{x\neq0}{\Longleftrightarrow}\quad x(1+y^2)=2y\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}$$

Für $x=0$ gilt $y=f(0)=0$, also gilt auch hier $x=\frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$f^{-1}:\underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])}\to[-1,1],\ y\mapsto\frac{2y}{1+y^2}$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1,x_2\in[-1,1]$ mit $x_1<x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)&=\frac{2x_2}{1+x_2^2}-\frac{2x_1}{1+x_1^2}=\frac{2x_2(1+x_1^2)-2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1+x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\
&=\frac{2(x_2-x_1+x_1x_2(x_1-x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}=\frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}>0\,,
\end{aligned}$$

denn wegen $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant1$ ist $x_1x_2<1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 8.10 auch.

Aufgabe 2

a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1 - i\sqrt{3}$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$\left|1 - i\sqrt{3}\,\right| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\,\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1 - i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\,\right)^{42} = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^{42} = 2^{42}e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42}e^{-14\pi i} = 2^{42}\,,$$

denn $e^{-14\pi i} = \cos(-14\pi) + i\sin(-14\pi) = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Damit erhalten wir

$$z_2 \;=\; \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 201} = e^{134\,i\pi} = \cos\left(134\pi\right) + i\sin\left(134\pi\right) = 1\,.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1 - e^{it} = \big(e^{-it/2} - e^{it/2}\big)e^{it/2} = -2i\sin(t/2)\,e^{it/2} = 2\sin(t/2)\,e^{i(t-\pi)/2}\,,$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0, 2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t - \pi) \in (-\pi, \pi]$. Also hat $z(t)$ die Länge $2\sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t - \pi)$.

c) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

weil $750 = 93 \cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93 \cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 3

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\,\cos y + \sin y\,\cos x}{\cos x\,\cos y - \sin x\,\sin y} = \frac{\cos x\,\cos y\,(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y})}{\cos x\,\cos y\,(1 - \frac{\sin x\,\sin y}{\cos x\,\cos y})} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y}\,.$$

b) Gemäß Vorlesung ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion von tan heißt Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \arctan(\tan(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \tan(\arctan(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nun seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $X := \arctan(x), Y := \arctan(y)$. Mit Hilfe der Identität $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}$ aus Teil a) erhalten wir

$$X + Y = \arctan\big(\tan(X+Y)\big) = \arctan\Big(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \ \tan Y}\Big) = \arctan\Big(\frac{x+y}{1-xy}\Big).$$

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx).$$

d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Arsinh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = e^y - e^{-y} \\ &\overset{e^y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2xe^y = e^{2y} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y} - 2xe^y = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y + x^2 = x^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad |e^y - x| = \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \ \text{ oder } \ e^y = \underbrace{x - \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{>|x| \geqslant x}}_{<x-x=0} \\ &\overset{e^y > 0}{\Longleftrightarrow} \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

e) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} y = \operatorname{Artanh} x \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \tanh y = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2y}(x - 1) = -1 - x \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y = \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) **i)** Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\frac{2}{3}\Big)^x = \frac{16}{93} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\Big(\frac{16}{93}\Big) = \frac{\ln \frac{16}{93}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100\,x$ ist nur für $x \in (0,\infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
x^{\log_{10} x} = 100\,x \quad &\iff \quad \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100\,x) \\
&\iff \quad (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\
&\iff \quad (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\
&\iff \quad (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\
&\iff \quad \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\
&\iff \quad x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \tfrac{1}{10}.
\end{aligned}$$

b) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7-3) = \log_2(4) = 2.$$