Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14
12.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass f stetig ist.

b) Bestimmen Sie den Wertebereich $f([-1,1])$ von f.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion besitzt. Berechnen Sie f^{-1}.

d) Beweisen Sie, dass f^{-1} streng monoton wachsend ist.

e) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = \left(1 - i\sqrt{3}\right)^{42}, \qquad z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201} .$$

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von $z(t) := 1 - e^{it}$.

c) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Berechnen Sie z^3 und z^{150}.

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Identitäten

a) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

b) $\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$;

c) $\left(\cosh x + \sinh x\right)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$;

d) $\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

e) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für alle $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

i) $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}\,;$ **ii)** $x^{\log_{10} x} = 100\,x\,.$

b) Beweisen Sie

$$\log_2\bigl(\sqrt{7} - \sqrt{3}\bigr) = 2 - \log_2\bigl(\sqrt{7} + \sqrt{3}\bigr)\,.$$