Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14
19.12.2013

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Laut Vorlesung sind die Funktionen

$\sin_k\colon \left[\frac{2k-1}{2}\,\pi, \frac{2k+1}{2}\,\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)\,,\qquad \cos_k\colon \left[k\pi, (k+1)\pi\right] \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)\,,$

bijektiv. Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen durch

$$\arcsin_k\colon [-1,1] \to \left[\tfrac{2k-1}{2}\,\pi, \tfrac{2k+1}{2}\,\pi\right],\ y \mapsto k\pi + (-1)^k \arcsin(y)\,,$$

bzw.

$$\arccos_k\colon [-1,1] \to \left[k\pi, (k+1)\pi\right],\ y \mapsto \arcsin_{k+1}(y) - \tfrac{\pi}{2}\,,$$

gegeben sind.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie für alle $y > 0$

$$\int_0^y x\, e^x\, dx = (y-1)e^y + 1\,.$$

Hinweis: Potenzreihe für $x\, e^x$.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^\pi \sin^2 x\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\pi \cos^2 x\, dx\,.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Für alle $f, g \in R[a,b]$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis in mehreren Schritten: $f, g \in R[a,b] \Rightarrow f + g \in R[a,b]$; $\alpha \geqslant 0, f \in R[a,b] \Rightarrow \alpha f \in R[a,b]$ und $f \in R[a,b] \Rightarrow -f \in R[a,b]$.

Aufgabe 4

Beweisen Sie:

a) Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und habe höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[a,b]$. Dann gilt $f \in R[a,b]$.

b) Seien $f \in R[a,b]$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gelte $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$. Dann gilt $g \in R[a,b]$ und

$$\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\ dx > 0\,.$$

b) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) \geqslant g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx\,.$$