

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgenden Grenzwerte.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1}\right)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes die folgende Abschätzung

$$x \ln x - y \ln y \leq (x - y)(1 + \ln x) \quad \text{für } x > y > 0.$$

Aufgabe 2

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := 1 - 8(e^{2x} + 4)^{-1}$.

a) Beweisen Sie, dass f injektiv ist, und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie damit die Ableitung der Umkehrfunktion von f .

c) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1} .

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f in $x_0 = 0$ sowie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f^{-1} in $y_0 = -\frac{3}{5}$.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f; 0)$ von $f : x \mapsto \ln(1+x)$ und zeigen Sie

$$0 \leq \ln(1+x) - T_4(f; 0)(x) \leq \frac{1}{5} x^5 \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

b) Bestimmen Sie Zahlen a , b und c , für die gilt:

$$|\ln(2+x) - a - bx| \leq cx^2 \quad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

c) Approximieren Sie die Funktion $f(x) := e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ durch das Taylorpolynom $T_2(f; \frac{1}{2})$ und geben Sie eine Konstante $C > 0$ an so, dass für alle $x \in [0, 1]$ gilt:

$$|f(x) - T_2(f; \frac{1}{2})(x)| \leq C |x - \frac{1}{2}|^3.$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass für alle $|x| < 1$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

b) Bestimmen Sie durch gliedweises Differenzieren den Wert der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 - n} \quad \text{für } |x| < 1.$$

c) Die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $f(x) := \ln(1 - x^2)$. Berechnen Sie $f^{(20)}(0)$ sowie $f^{(31)}(0)$.

Aufgabe 5

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := x^2 + 2x - 3$. Berechnen Sie eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $x_0 = -1$ die Funktion $1/f$ darstellt. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.