Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2013/14
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1}\,dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}\,.$$

Für $R \to \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

b) Wir zeigen, dass dieses Integral „am linken Rand" divergent ist: Für jedes $y \in (0, e^{-1}]$ gilt $-\ln y \geqslant 1$. Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von $\sinh y$ erkennt man

$$\sinh y - y = \big(y + \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots\big) - y = \tfrac{1}{3!}y^3 + \tfrac{1}{5!}y^5 + \cdots = \tfrac{1}{3!}y^3 h(y)$$

mit $h(y) := (1 + \frac{3!}{5!}y^2 + \cdots)$. Für $y \to 0$ gilt $h(y) \to 1$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $h(y) \leqslant 3!$ für alle $y \in (0, \varepsilon]$. Für diese y ergibt sich $0 < \sinh y - y \leqslant y^3$. Zusammen erhält man

$$\frac{-y\ln y}{\sinh y - y} \geqslant \frac{y}{\sinh y - y} \geqslant \frac{y}{y^3} = y^{-2} \geqslant 0 \qquad \text{für alle } y \in (0, \min\{\varepsilon, e^{-1}\}]\,.$$

Mit dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz von $\int_0^\varepsilon \frac{-y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$, weil das uneigentliche Integral $\int_0^\varepsilon y^{-2}\,dy$ divergent ist. Hiermit divergiert auch $\int_0^\varepsilon \frac{y\ln y}{\sinh y - y}\,dy$.

c) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s}\cdot\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx\,.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s}\cdot t\sin(tx)\,dx = \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2}\cdot t^2\cos(tx)\,dx\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)\int_0^R e^{sx}\cos(tx)\,dx &= \frac{e^{sx}}{s}\cos(tx)\Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2}\,t\sin(tx)\Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s}\cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2}\,t\sin(tR) - 0 \xrightarrow{R\to\infty} -\frac{1}{s}\,.\end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx}\cos(tx)\,dx = -\frac{1}{s}\left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2 + t^2}\,.$$

d) Aus der Ungleichung $1 + t \leqslant e^t$ folgt $\ln(1+t) \leqslant t$ für alle $t \geqslant 0$. Also ist

$$|e^{-t}\ln(1+t)| \leqslant te^{-t} \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Da das Integral $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$ (vgl. Aufgabe 3 mit $n = 1$ und $\lambda = 1$) existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 2

Wir zeigen zunächst, dass das uneigentliche Integral $I_0(1)$ konvergiert und dass sein Wert $= 1$ ist:

$$I_0(1) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \big[-e^{-x}\big]_{x=0}^R = \lim_{R\to\infty} -e^{-R} + e^{-0} = 1\,.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Partielle Integration mit $f(x) = x^n$ und $g'(x) = e^{-x}$ liefert

$$\begin{aligned} I_n(1) &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\big[x^n(-e^{-x})\big]_{x=0}^R - \int_0^R n x^{n-1}(-e^{-x})\,dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} -R^n e^{-R} + nI_{n-1}(1) = nI_{n-1}(1)\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Aus dieser Rekursionsformel folgt per vollständiger Induktion, dass das Integral $I_n(1)$ konvergiert mit Wert $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$:
IA: $n = 0$. Zuvor haben wir gesehen, dass $I_0(1)$ konvergiert und dass $I_0(1) = 1 = 0!$ gilt.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Das Integral $I_n(1)$ konvergiere und es gelte $I_n(1) = n!$ (IV). Damit ergibt sich

$$I_{n+1}(1) \overset{(*)}{=} (n+1)I_n(1) \overset{\text{(IV)}}{=} (n+1)n! = (n+1)!\,.$$

Für jedes $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ führt die Substitution $y = \lambda x, dy = \lambda\,dx$ auf

$$I_n(\lambda) = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x^n e^{-\lambda x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^n e^{-y}\,\frac{dy}{\lambda} = \lambda^{-(n+1)} \lim_{R\to\infty} \int_0^{\lambda R} y^n e^{-y}\,dy = \lambda^{-(n+1)} I_n(1) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Aufgabe 3

a) **i)** Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \ln|x|\,dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx = \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \big[x \ln x - x\big]_\varepsilon^1 = (0 - 1) - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} -1\,.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$.
Sei nun $\eta \in (0, 1)$. Mit der Substitution $y = -x$, $dy = (-1)\,dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx = \int_{-1}^{-\eta} \ln(-x)\,dx = \int_1^\eta \ln(y)\,(-1)\,dy = \int_\eta^1 \ln y\,dy \xrightarrow{\eta\to 0+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^0 \ln|x|\,dx$ konvergent.
Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x|\,dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^1 \ln|x|\,dx = \lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x|\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \ln|x|\,dx = -1 - 1 = -2\,.$$

ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta\to 0+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

existieren.
Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_{\varepsilon}^{1} = -\ln\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \infty\,.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergiert.

b) **i)** Wie in **a) i)** gesehen, sind $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon\to 0+}\big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \ln|x|\,dx\big)$ $= -1-1 = -2$.

ii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\ln|x|\big]_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - 0 + 0 - \ln\varepsilon = 0\,.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx\right) = 0\,.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchychen Hauptwert.

Aufgabe 4

a) Da die Funktion f monoton fallend ist, gilt auf jeden Fall $f \in R[2,\beta]$ für alle $\beta > 2$. Wegen $f > 0$ ist $\beta \mapsto \int_2^\beta f(x)\,dx$ monoton wachsend, so dass die Konvergenz des uneigentlichen Integrals äquivalent zur Existenz einer Konstanten C mit $\int_2^\beta f(x)\,dx \leqslant C$ für alle $\beta > 0$ ist.

Ebenso liefert das Monotoniekriterium für Reihen 7.2 (1), dass die Konvergenz von $\sum_{n=2}^\infty f(n)$ äquivalent zur Existenz eines $K > 0$ mit $\sum_{n=2}^m f(n) \leqslant K$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant 2$ ist.

„$\Longrightarrow$“ Es existiere ein C wie oben angegeben. Weil f monoton fallend ist, gilt

$$\sum_{n=3}^{m} f(n) = \sum_{n=3}^{m} \int_{n-1}^{n} f(n)\,dx \leqslant \sum_{n=3}^{m} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{2}^{m} f(x)\,dx \leqslant C$$

für alle $m \geqslant 3$, d. h. mit $K := f(2) + C$ ergibt sich die Konvergenz der Reihe.

„$\Longleftarrow$“ Setzt man umgekehrt die Existenz von K voraus, so erhält man die Abschätzung

$$\int_{2}^{\beta} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=2}^{[\beta]} \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=2}^{[\beta]} \int_{n}^{n+1} f(n)\,dx = \sum_{n=2}^{[\beta]} f(n) \leqslant K$$

für alle $\beta > 2$, d. h. mit $C := K$ sieht man die Konvergenz des uneigentlichen Integrals ein.

Hierbei bezeichnet $[\beta]$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich β ist, d.h. $[\beta] := \max\{k \in \mathbb{N} :\ k \leqslant \beta\}$.

b) Die durch $f(x) := \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ definierte Funktion $f\colon [2,\infty) \to (0,\infty)$ ist monoton fallend und positiv. Nach dem Integralkriterium aus **a)** konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty f(x)\,dx = \int_2^\infty \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx$$

konvergiert. Die Substitution $y := \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ liefert

$$\int_2^R \frac{1}{x\,(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{y^\alpha}\,dy\,.$$

Im Fall $\alpha \leqslant 1$ divergiert die rechte Seite für $R \to \infty$, im Fall $\alpha > 1$ konvergiert die rechte Seite für $R \to \infty$ (vgl. Beispiel 12.1 (1)). Also konvergiert die Reihe genau für $\alpha > 1$.