

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik

11. Übungsblatt

**Aufgabe 1**

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$       b)  $\int_0^{\infty} \frac{y \ln y}{\sinh y - y} dy$   
c)  $\int_0^{\infty} e^{sx} \cos(tx) dx \quad (s < 0, t \in \mathbb{R})$       d)  $\int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1+t) dt$

**Aufgabe 2**

Es sei  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}_0$  das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} dx$$

konvergiert, und berechnen Sie  $I_n(\lambda)$ .

*Hinweis:* Drücken Sie  $I_n(\lambda)$  mittels  $I_n(1)$  aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man  $I_{n+1}(1)$  berechnen kann, wenn  $I_n(1)$  bekannt ist.

**Aufgabe 3**

a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i)  $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$       ii)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

i)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x| dx + \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx \right)$       ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$

**Aufgabe 4**

a) Zeigen Sie das *Integralkriterium*: Ist die Funktion  $f : [2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  monoton fallend, so sind äquivalent:

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert.}$$

b) Untersuchen Sie, für welche  $\alpha > 0$  die Reihe  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  konvergiert.