Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2013/14

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informaechniktionst
Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Um zu zeigen, dass $A := \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \exists C > 0\ \forall j \in \mathbb{N} : \ |x_j| \leqslant C\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ ist, verwenden wir den Satz 14.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $(0)_{j\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots) \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $(x_j), (y_j) \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|x_j| \leqslant C$ und $|y_j| \leqslant C'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Daher gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

1) $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| \leqslant C + C'$, d.h. $(x_j) + (y_j) \in A$;

2) $|\alpha x_j| = |\alpha| \cdot |x_j| \leqslant C|\alpha| \leqslant C|\alpha| + 1 =: \tilde{C}$ (damit $\tilde{C} > 0$), also $\alpha(x_j) \in A$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz 14.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$ ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

1) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in B$;

2) $(\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, also $\alpha f \in B$.

c) $C := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in \mathbb{R}^{[-1,1]} \mid f \text{ ist surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x+y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x+y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x+y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

Nun verwende man Satz 14.4.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \mathrm{lin}(\{e_1\}) = \big\{\alpha e_1 :\ \alpha \in \mathbb{R}\big\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \mathrm{lin}(\{e_2\}) = \big\{\beta e_2 :\ \beta \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2\,.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz 14.4.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\mathrm{lin}(M) = \mathrm{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. [Weiteres Gegenbeispiel siehe Aufgabe 5 a)]

c) Existiert ein Vektor $v \in V$ mit eindeutiger Darstellung als Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (d.h. es gibt eindeutige $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$), so wird auch der Nullvektor $0 = v - v$ eindeutig dargestellt. Folglich lässt sich der Nullvektor nur als tiviale Linearkombination der $v_1, v_2, \ldots, v_n$ darstellen. Also sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

d) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise im Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Wählt man $v := \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, so sind die Vektoren $v_1 + v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $v_2 + v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ linear abhängig, denn es gilt $0 \cdot (v_1 + v) + 1 \cdot (v_2 + v) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

e) Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{C}^2$. Dort sind $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Außerdem sind v_1 und $v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig. Die Vektoren v_2 und v_3 sind jedoch nicht linear unabhängig, denn es gilt $v_2 - v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $v_1 = -2v_3$. Daher gilt $v_1 + 0v_2 + 2v_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren v_1, v_2, v_3 auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir v_1, v_2, v_3 als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es v_1, v_2, v_3 auch.

ii) Wäre $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_3 v_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, also mit

$$\begin{cases} \alpha_1 & & + \alpha_3 a & = 0 \\ & \alpha_2 & + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 & - \alpha_2 & + \alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & -a\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & -2\alpha_3 \end{cases}$$

Nur für $a = 2$ gibt es eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$).

Also sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 5

a) Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Wir halten zunächst folgendes fest: Ist V ein beliebiger Vektorraum und gilt $U_1 \subset U_2 \subset V$, so folgt $\mathrm{lin}(U_1) \subset \mathrm{lin}(U_2) \subset V$. Außerdem haben wir $\mathrm{lin}(\mathrm{lin}(U)) = \mathrm{lin}(U)$ für jede Teilmenge $U \subset V$. [Beides folgt unmittelbar aus der Definition des linearen Aufspanns.]

Also ist klar, dass die drei Vektorräume $\mathrm{lin}(v_1, v_2)$, $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Teilmengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Um zu sehen, ob $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ tatsächlich größer ist als die anderen Mengen, untersuchen wir nun, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig sind, d. h. wir fragen uns, ob es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3| > 0$ und $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ gibt. Für solche Zahlen muss wegen der zweiten Komponente der Vektoren $\lambda_3 = -\lambda_1$ gelten. Offenbar ist $v_1 - v_3 = -2v_2$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also in der Tat linear abhängig; es gilt $v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$. Folglich haben wir

$$\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_1 + 2v_2) \subset \mathrm{lin}(\mathrm{lin}(v_1, v_2)) = \mathrm{lin}(v_1, v_2)\,.$$

Völlig analog ergibt sich, dass $\mathrm{lin}(v_1, v_3)$ und $\mathrm{lin}(v_2, v_3)$ Obermengen von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3)$ sind. Alle vier zu betrachtenden Vektorräume sind somit identisch.

b) Eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist durch die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ zu zeigen, reicht es zu begründen, dass wir jeden dieser Basisvektoren durch b_1, b_2, b_3 darstellen können: $e_1 = b_3 - b_2$, $e_3 = b_3 - b_1$, $e_2 = b_1 - e_1 = b_1 - (b_3 - b_2) = b_1 - b_3 + b_2$.

Um $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$ nachzuweisen, können wir auch zeigen, dass die drei Vektoren b_1, b_2, b_3 des $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ folgt dann $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.
Wir schreiben b_1, b_2, b_3 als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Differenz der ersten von der dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt (mit den Bezeichnungen von 14.7) $n = r = 3$ und die Vektoren b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.