Für die Vorlesungen dieser Woche siehe Skript Seiten 100-107.

Kurze Zusammenfassung Montag 02.02.2015

Satz: Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n\times m}$ überführen, die in Zeilenstufenform (ZSF) ist. Dabei heißt

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform, falls es ein $r \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_r \le m$ gibt mit
(i) für $j = 1, 2, \dots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \dots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;
(ii) für $j = r+1, \dots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \dots, m$.

Folgerung Sei $m > n$. Dann m Vektoren in K^n sind immer linear abhängig.

14.9. Zeilennormalform Eine Matrix, die in Zeilenstufenform ist, kann man durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform (ZNF) bringen. Dabei heißt $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ in Zeilennormalform, wenn sie in Zeilenstufenform ist und zusätzlich gilt:
(iii) für $j = 1, 2, \dots, r$ gilt: $\gamma_j = c_{jk_j} = 1$ und $c_{lk_j} = 0$ für $l = 1, 2, \dots, j-1$ (dh oberhalb von c_{jk_j} stehen auch nur Nullen).

14.10. Basen und Dimension Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz und Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_n \in V$ heißen Basis von V, falls sie linear unabhängig sind und $\text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_n\} = V$ gilt. In diesem Fall enthalten je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Zahl heißt die *Dimension von V*, geschrieben $\dim V$.

Bemerkung: Ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von Dimension n ist ein $\mathbb{R}$ Vektorraum von Dimension n.

Bemerkung: Ist $n \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ eine Basis von V, so gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j b_j$. Die $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ heißen *Koordinaten* von v bzgl. der Basis $b_1, b_2, \dots, b_n$.

14.11. Lineare Gleichungssysteme Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben ein lineares Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array}$$

mit gegebenen $a_{jk}, b_j \in \mathbb{K}$ und gesuchten $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ in Matrixschreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder als $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben und $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ gesucht ist. Hierbei verwenden wir das Matrix-Vektor-Produkt:

Für $A = (a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x} = (x_k)_{k=1}^m \in \mathbb{K}^m$ ist $A\vec{x} = \Big(\sum_{k=1}^m a_{jk}x_k \Big)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$.

Beachte: Wir schreiben Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$, die wir bisher als m-Tupel geschrieben haben, ab jetzt ggf. als **Spaltenvektoren**! Dies ist die übliche Konvention.

Kurze Zusammenfassung Dienstag 03.02.2015

14.12. Eigenschaften des Matrix-Vektor-Produktes

Für alle $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \qquad (A+B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}, \qquad A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = (\alpha A)\vec{x},$$

wobei für $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ die Matrizen $A+B, \alpha A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ gegeben sind durch

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}, \qquad \alpha A = (\alpha a_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m},$$

dh an jeder Stelle (j,k) werden die Einträge addiert bzw. mit α multipliziert.

14.13. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Wir setzen

$$\operatorname{Kern} A := \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^m \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} A := \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{K}^m\} \subseteq \mathbb{K}^n.$$

$\operatorname{Kern} A$ ist die Lösungsmenge der homogenen Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ heißt inhomogen und $\vec{b}$ heißt Inhomogenität der Gleichung. Die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ hat Lösung, dann und nur dann wenn $\vec{b} \in \operatorname{Bild} A$.

Satz: (1) $\operatorname{Kern} A$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^m$ und $\operatorname{Bild} A$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

(2) $\operatorname{Bild} A$ ist der lineare Aufspann der Spalten von A.

(3) Sind $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^m$ mit $A\vec{x} = \vec{b} = A\vec{y}$, so ist $\vec{x} - \vec{y} \in \operatorname{Kern} A$. Ist $\vec{z} \in \operatorname{Kern} A$, so ist $A(\vec{x} + \vec{z}) = \vec{b}$. Insbesondere ist die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung, wenn sie nicht-leer ist, ein *affiner Teilraum* von $\mathbb{K}^m$. (Also hat das System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen).

14.14. Lösungsalgorithmus Seien $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ und $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Zur Lösung erweitern wir die Matrix A um $\vec{b}$ als $(m+1)$-te Spalte, betrachten also $(A\,|\,\vec{b}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$. Für $A = (a_{jk})$ und $\vec{b} = (b_j)$ ist

$$(A\,|\,\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Wir werden Zeilenumformungen verwenden. Die Zeilenumformungen ändern nicht die Lösungsmenge des Systems.

Algorithmus (Eliminationsverfahren nach Gauß):
(1) Matrix A um $\vec{b}$ als letzte Spalte erweitern.
(2) Die erweiterte Matrix $(A\,|\,\vec{b})$ durch Zeilenumformungen auf ZNF (oder ZSF) bringen.
(3) Lösbarkeit und Lösung ablesen.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösbarkeit: Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist **nicht lösbar** genau dann, wenn eine ZSF von $(A\,|\,\vec{b})$ die Form $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times(m+1)}$ hat und es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit $c_{jk} = 0$ für $k = 1, \dots, m$ und $c_{j,m+1} \neq 0$.

Algorithmus Schritt (3), Ablesen der Lösung: Für alle Spalten mit der Eigenschaft das kein Element von denen das erste nicht Null Element seine Zeile ist, setzen wir den zugohörigen unbekannten als freien Parameter. Dann lösen wir auf bezüglich der anderen unbekannten.