Dieses File hat eine kurze Zusammenfassung der Definitionen und Theoremen der Vorlesungen am 01.12.2014 und 02.12.2014 (ohne Erklärungen, Skizzen, Beispiele).

kurze Zusammenfassung Montag 01.12.2014

Erinnerung: Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man die Exponentialreihe $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Im letzen Mal haben wir Eigenschaften dieser Funktion diskutiert. Am Anfang der heutigen Vorlesung diskutieren wir sie ein bisschen mehr. Man kann die Exponentialfunktion e^z so definieren: $e^z = E(z)$.

Man definiert cos, sin wie folgt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Dann gilt

$$sinz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$cosz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Wenn $x \in \mathbb{R}$, dann $\cos x, \sin x \in \mathbb{R}$. Ferner

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (Eulerformel).$$

Insbesondere $Re(e^{ix}) = \cos x$, $Im(e^{ix}) = \sin x$. Es folgt, dass $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ und, dass $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\forall z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

$\forall h \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\sin h| \leq |h|e^{|h|}, \qquad |\cos h - 1| \leq |h|e^{|h|}$$

$$|\sin h - h| \leq |h|^2 e^{|h|}, \quad |\cos h - 1| \leq |h|^2 e^{|h|}.$$

Definition 1. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine* Potenzreihe (PR) um z_0 *hat die Form* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$*, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ist. Die a_n heißen* Koeffizienten *der Potenzreihe und z_0 heißt* Entwicklungspunkt.

Wir nennen eine Potenzreihe reell*, falls $z_0 \in \mathbb{R}$ und alle a_n reell sind.*

Definition 2. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe. Der Konvergenzradius ist definiert durch*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \textit{(Formel von Cauchy-Hadamard)}$$

Satz 0.1. $|z - z_0| < R \implies$ *Potenzreihe absolut konvergent.*
$|z - z_0| > R \implies$ *Potenzreihe divergent.*

kurze Zusammenfassung Dienstag 02.12.2014)

Satz 0.2. *(Konvergenzradius R über Quotienten): Sei* $\sum_{n=0} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe. Wenn* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha$, *wobei* $0 \leq \alpha \leq \infty$, *dann* $R = \frac{1}{\alpha}$.

Achtung: $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oder $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ geben nicht, was der Konvergenzradius ist.

Definition 3 (Limes). *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, y \in \mathbb{R}$. *Wir sagen*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y,$$

wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, *so dass*

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Bemerkung 1. *Der Limes kann ähnlich definiert werden, wenn* $f : D \to \mathbb{R}$, *mit* D *Intervall oder endliche Vereinigung von Intervallen* [1]. *In diesem Fall muss* $0 < |x - x_0| < \delta$ *durch* $x \in D$ *und* $0 < |x - x_0| < \delta$ *ersetzt werden. Im Rest der Vorlesung ist mit* D *eine solche Menge gemeint. Der Limes kann auch für kompliziertere Mengen definiert werden, aber wir führen hier die Definition nicht ein.*

Definition 4. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in D$ [2]. f *heißt stetig in* x_0, *wenn*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

f *heißt stetig, falls sie stetig in* y *ist* $\forall y \in D$.

Satz 0.3. *(i) Alle folgende Funktionen sind stetig: Polynome, sin, cos, Exponentialfunktion.*
(ii) f *stetig in* x_0 *und* g *stetig in* $f(x_0) \implies g \circ f$ *ist stetig in* x_0.
(iii) wenn f, g *stetig in* x_0, *dann* $f + g, f \cdot g$ *sind stetig in* x_0. *Wenn dazu* $g(x_0) \neq 0$ *dann ist* $\frac{f}{g}$ *stetig in* x_0.

Satz 0.4. *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \lim f(x_n) = y, \text{ für alle Folgen in } D/\{x_0\} \text{ mit } x_n \to x_0.$$

Satz 0.5 (Zwischenwertsatz). *Seien* $a < b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Wenn* $f(a) < f(b)$ $[f(a) > f(b)]$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $f(a) < c < f(b)$ $[f(a) > c > f(b)]$ *dann* $\exists x_0 \in (a, b)$ *mit* $f(x_0) = c$.

Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist. Dann ist $f(I)$ auch ein Intervall.

---

[1] Hier das Intervall $[a, a] = \{a\}$ ist nicht zu bercksichtigen

[2] Der Begrief der stetigen Funktion kann für D eine beliebige nicht leere Teilemge von $\mathbb{R}$ eingeführt werden (und nicht nur für endliche Verreinigung von Intervallen). Hier führen wir aber diese Definition nicht ein.