kurze Zusammenfassung Montag 08.12.2014

Definition 1 (Einseitige Grenzwerte)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0, y \in \mathbb{R}$. *Dann*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = y \quad [\textit{bzw.} \lim_{x \to x_0-} f(x) = y],$$

wenn $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, *so dass* $x_0 < x < x_0 + \delta$ *[bzw.* $x_0 - \delta < x < x_0$*]* $\implies |f(x) - y| < \epsilon$. *In diesem Fall heißt* y *rechtsseitiger [bzw. linksseitiger] Limes von* f *in* x_0.

Satz 0.1. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion und* $x_0, y \in \mathbb{R}$. *Dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0-} f(x) = y \textit{ und } \lim_{x \to x_0} f(x) = y \right).$$

Bemerkung 1. *Die Definition und der Satz oben sind anwendbar für Funktionen* $f : D \to \mathbb{R}$, *wobei* $D \subset \mathbb{R}$, *wenn es sinnvoll ist,* $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ *und* $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ *zu betrachten.*

Bemerkung 2. *Man kann* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *mit* $x_0, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *und* $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = y$ *mit* $x_0 \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Die Definitionen sind ähnlich wie im Fall von folgen, und die Intuition ist die gleiche.*

Definition 2. *Sei* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion.* f *heißt* monoton wachsend *[bzw.* monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2)].$$

f *heißt* streng monoton wachsend *[bzw.* streng monoton fallend*], falls für alle* $x_1, x_2 \in D$ *gilt:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad [\textit{bzw. } f(x_1) > f(x_2)].$$

f *heißt* monoton*, falls* f *monoton wachsend oder monoton fallend ist, und* f *heißt* streng monoton*, falls* f *streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Satz 0.2. *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(a) Dann ist f *injektiv und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *ist ebenfalls streng monoton wachsend [bzw. fallend].*

(b) Ist f *zusätzlich stetig, so ist* $f(I)$ *ein Intervall und* $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

Es gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ (Exponentialfunktion) ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Definition 3 (Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt (*natürlicher*)* Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, *d.h. also* $\ln x := \exp^{-1}(x)$ *für* $x \in (0, \infty)$.

Eigenschaften: ln ist streng monoton wachsend und stetig. Es gilt $\ln((0, \infty)) = \mathbb{R}$, $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$, sowie $\ln x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $\ln x \to -\infty$ für $x \to 0+$. Für alle $x, y > 0$ gilt

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{und} \quad \ln(x/y) = \ln x - \ln y.$$

kurze Zusammenfassung Dienstag 09.12.2014

Definition 4 (Die allgemeine Potenz)**.** *Wir definieren für $a > 0$ die allgemeine Potenz:*

$$a^x := \exp(x \ln a) \quad \textit{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $a > 0, a \neq 1$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, streng monoton, stetig und bijektiv.

Definition 5 (Der allgemeine Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion* $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *heißt* Logarithmus zur Basis a. *Es ist also* $\log_a(a^x) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $a^{\log_a y} = y$ *für alle* $y \in (0, \infty)$.

Satz 0.3. *Für alle* $y \in (0, \infty)$ *gilt* $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

Satz 0.4. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$ *und* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann hat* f *ein Minimum und ein Maximum in* $[a, b]$*, d.h. es gibt* $x_1, x_2 \in [a, b]$*, so dass*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

Bemerkung 3. *Die Aussage des Satzes gilt auch, wenn [a,b] durch* $\cup_{j=1}^n [a_j, b_j]$ *ersetzt wird, wobei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_j \leq b_j$ *für alle* $j \in \{1, ..., n\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
(i) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(ii)$\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos(x + \pi) = -\cos x$;
(iii) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ (dh sin und cos sind 2π-*periodisch*).
(iv) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; (v) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Nullstellen von sin und cos:
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$.
Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow$ es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $x = k\pi$.
Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\cos(k\pi) = (-1)^k$ und $\sin(k\pi) = 0$.

Arcuscosinus Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arccos* : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ und sie heißt Arcuscosinus.

Arcussinus Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend und ebenso ihre Umkehrabbildung *arcsin* : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und sie heißt Arcussinus.

Tangens Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt *Tangens.* (Beachte, dass die Menge $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ genau die Nullstellen des Cosinus enthält.)

Arcustangens $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv und ebenso ihre Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ und sie heißt *Arcustangens.*

Anwendung (Polarkoordinaten) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in (0, \infty)$ und genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\phi}$. Dabei heißt $r = |z|$ *Länge von* z und $\phi =: \arg z$ heißt das *Argument von* z.

Wie wird $\arg z$ **bestimmt?** Wenn z=a+bi, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z \neq 0$, dann $\phi = \arctan(b/a)$ für $a > 0$, $\phi = sgn(b)\pi/2$ für $a = 0$ ($sgn(b) = \frac{b}{|b|}$), sowie $\phi = \pi + \arctan(b/a)$ für $a < 0$, $b \geq 0$, und $\phi = -\pi + \arctan(b/a)$ für $a, b < 0$.