Kurze Zusammenfassung Montag 19.01.2015

Satz 0.1 (11.12 **Partielle Integration**). *Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt*

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \quad \text{auf } I.$$

Ist $I = [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Satz 0.2 (11.13 **Integration durch Substitution**). *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $g \in C^1(J)$ mit $g(J) \subseteq I$. Ist F eine Stammfunktion von f dann gilt*

(i) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$, *wobei* $c \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F(g(b)) - F(g(a))$.

Kurze Zusammenfassung Dienstag 20.01.2015

In dieser Vorlesung:

(1) Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so sei f über jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar.

(2) Es seien stets $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\alpha < b$ und $a < \beta$.

13.4 **Konvergenz uneigentlicher Integrale** Sei $f : [a, \beta) \to \mathbb{R}$ (bzw. $(\alpha, b] \to \mathbb{R}$) eine Funktion. Das uneigentliche Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ (bzw. $\int_\alpha^b f(x)\,dx$) heißt konvergent, falls der Limes $\lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx$ (bzw. $\lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx$) existiert und reell ist. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^\beta f(x)\,dx := \lim_{r\to\beta-} \int_a^r f(x)\,dx \quad \Big(\text{bzw.} \quad \int_\alpha^b f(x)\,dx := \lim_{r\to\alpha+} \int_r^b f(x)\,dx\Big).$$

Ein nicht konvergentes uneigentliches Integral heißt divergent.

Definition 1. *Sei $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das* uneigentliche Integral *$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt konvergent, falls es ein $c \in (\alpha, \beta)$ so gibt, dass die uneigentlichen Integrale $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ und $\int_c^\beta f(x)\,dx$* ***beide*** *konvergent sind. In diesem Fall setzt man*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx := \int_\alpha^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx,$$

und die Definition ist unabhängig von $c \in (\alpha, \beta)$.

Das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ heißt divergent, falls $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ nicht konvergent ist.

Definition 2 (Absolut konvergente uneigentliche Integrale). *Ein uneigentliches Integral $\int_a^\beta f(x)\,dx$ heißt absolut konvergent, falls $\int_a^\beta |f(x)|\,dx$ konvergent ist.*

Satz 0.3 (13.7). *(1) Ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ konvergent und*

$$\left|\int_a^\beta f(x)\,dx\right| \le \int_a^\beta |f(x)|\,dx.$$

(2) ***Majorantenkriterium:*** *Ist $|f| \le g$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ konvergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ absolut konvergent.*

(3) ***Minorantenkriterium:*** *Ist $f \ge g \ge 0$ auf $[a, \beta)$ und $\int_a^\beta g(x)\,dx$ divergent, so ist $\int_a^\beta f(x)\,dx$ divergent.*