Kurze Zusammenfassung Montag 22.12.2014

10.11 [1] Höhere Ableitungen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (**dbar**).

Definition 1. *(a) f heißt in $x_0 \in I$* zweimal differenzierbar*, falls f' in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt*

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. Ableitung von f in x_0*.*

f heißt auf I zweimal differenzierbar*, falls f' auf I differenzierbar ist. Dann heißt $f'' = (f')'$* zweite Ableitung von f auf I*.*

Entsprechend definiert man im Falle der Existenz $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0)$ etc. bzw. f''', $f^{(4)}$, ...

Definition 2. *Sei $n \in \mathbb{N}$. f heißt* auf I n-mal stetig differenzierbar*, falls f auf I n-mal differenzierbar ist und $f, f', f'', \ldots, f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ stetig sind. Dafür schreiben wir $f \in C^n(I)$.*

Außerdem: $f \in C^0(I) = C(I)$, falls f auf I stetig ist, und $f \in C^\infty(I)$, falls $f \in C^n(I)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dh wenn f auf I beliebig oft differenzierbar ist.

Bemerkung 1. *Wenn eine Funktion differentierbar ist, dann ist die Abbleitung nicht unbedingt eine stetige Funktion.*

Satz 0.1 (10.12 Satz von Taylor)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^n(I)$ und $f^{(n)}$ sei auf I differentierbar. Seien $x, x_0 \in I$. Dann gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{n\text{-tes Taylorpolynom } T_n(f;x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{n\text{-tes Restglied } R_n(f,x_0)(x)} . \end{aligned}$$

Definition 3. *Falls $f \in C^\infty(I)$, heißt die Potenzrreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ Taylorreihe der Funktion f.*

Korollar 0.2. *Sei $f \in C^\infty(I)$, und $x_0 \in I$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f;x_0)(x) \to f(x) \quad \forall x \in I \qquad (\text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) \quad \forall x \in I),$$

genau dann wenn $R_n(f, x_0)(x) \to 0$ für jedes $x \in I$

Wenn die Aussagen des Korollars gelten, ist die Funktion durch ihre Taylorreihe darstellbar.

[1] Diese Zahlen sind Bezug im Skript

Kurze Zusammenfassung Dienstag 23.12.2014

Satz 0.3 (10.13 Folgerung des Taylorsatzes)**.** *Sei* $n \geq 2$*,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f \in C^n(I)$ *und* $x_0 \in I$ *mit* x_0 *kein Randpunkt von* I*. Weiter sei*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \textbf{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

(a) Ist n *gerade und* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *[bzw.* $f^{(n)}(x_0) < 0$*], so hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum [bzw. ein lokales Maximum].*

(b) Ist n *ungerade, so hat* f *in* x_0 *kein lokales Extremum.*

Bemerkung 2. *Allgemeiner sei* $f \in C^2(I)$ *mit* $f'' \geq 0$ *auf* I *[bzw. mit* $f'' \leq 0$ *auf* I*]. Solche Funktionen heißen* konvex *[bzw.* konkav*]. Es gilt dann:*

> Ist $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$, so hat f in x_0 ein globales Minimum [bzw. ein globales Maximum].

Satz 0.4 (10.11 **Die Regeln von de l'Hospital**)**.** *Seien* $a \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und* $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*. Seien* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *auf* (a,b) *differenzierbar mit* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b)$*. Weiter sei* $\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*.*

(a) Ist $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$*, so gilt*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(b) Ist $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$*,* $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$*, so gilt*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Bemerkung 3. *Ähnliche Aussage gilt im Fall* $b = -\infty$*, wenn man* (a,b) *durch* (b,a) *ersetzt.*