Für die Vorlesungen dieser Woche siehe Skript Seiten 96-102. In der Zusammenfassung Zahlen der Art 14.3 sind Bezug im Skript.

Kurze Zusammenfassung Montag 26.01.2015 In dieser Vorlesung schreiben wir $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Alle Aussagen Definitionen unten sind anwendbar wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{K} \textit{ für } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir definieren

$$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

durch komponentenweise *Addition bzw. komponentenweise Multiplikation mit* α*, dh durch*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

Der Punkt $\cdot$ für die Multiplikation mit Skalaren wird gewöhnlich weggelassen.

14.2. Vektorraumaxiome Setzen wir $V = \mathbb{K}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, so haben $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ die folgenden Eigenschaften:

($V1$) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$ (Assoziativität),
($V2$) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$ (Kommutativität),
($V3$) es gibt eine $0 \in V$ mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$ (Existenz der Null),
($V4$) für jedes $x \in V$ gibt es ein $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$ (Existenz des Negativen),
($V5$) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in V$ (Assoziativität der Multiplikationen),
($V6$) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ und $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ (Distributivität),
($V7$) $1x = x$ für alle $x \in V$ (Kompatibilität).

Definition: Ist $V \neq \emptyset$ eine Menge mit Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$, für welche die Eigenschaften ($V1$)–($V7$) gelten, so heißt V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ oder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K}$-VR). Die Elemente eines Vektorraumes heißen Vektoren.

Allgemein: jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

14.4. Untervektorräume Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Untervektorraum oder linearer Teilaum von V, wenn
(i) $U \neq \emptyset$ ist und
(ii) für alle $x, y \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\alpha x \in U$.

14.5. Affine Teilräume Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt affiner Teil- oder Unterraum von V, falls es einen Untervektorraum U von V und ein $w_0 \in V$ gibt mit

$$W = w_0 + U = \{w_0 + u : u \in U\}.$$

14.6. Der lineare Aufspann

Definition 2. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Vektoren aus V.*
Eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ist ein Vektor der Form

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \quad \textit{mit } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Kurze Zusammenfassung Dienstag 27.01.2015

14.6. Satz: Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subseteq V$, so ist

$$\mathrm{lin}(M) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}_0, \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in M \Big\}$$

ein Untervektorraum von V, genannt der <u>von M erzeugte Untervektorraum</u> / <u>lineare Aufspann von M</u>.

14.7. Lineare Unabhängigkeit Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition: Man nennt n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ <u>linear unabhängig</u>, falls für alle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Sind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, so heißen sie <u>linear abhängig</u>. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind also genau dann linear abhängig, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ findet, die nicht alle $= 0$ sind, mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$.

14.8. Zeilenumformungen Seien n Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus dem $\mathbb{K}^m$ gegeben, deren lineare Unabhängigkeit wir untersuchen wollen. Dabei sei $v_j = (v_{j1}, v_{j2}, \ldots, v_{jm})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir schreiben die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als **Zeilen** in eine Matrix A, dh

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1m} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nm} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist eine $n \times m$-Matrix mit n Zeilen und m Spalten. Wir schreiben dafür $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

Die Matrix A bringen wir in eine Form, an der wir die lineare Unabhängigkeit der Zeilen ablesen können, mittels der folgenden <u>Zeilenumformungen</u> für eine gegebene $n \times m$-Matrix B mit Zeilen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^m$:

(Z1) Ersetze eine Zeile w_j durch αw_j, wobei $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$
(Z2) Ersetze eine Zeile w_j durch $w_j + \beta w_k$, wobei $\beta \in \mathbb{K}$ und $k \neq j$
(Z3) Vertausche die Zeilen w_j und w_k, wobei $j \neq k$.

Bemerkung: Die Zeilen von B sind genau dann linear unabhängig, wenn die Zeilen der umgeformten Matrix linear unabhängig sind.

Satz: Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ kann man durch endlich viele Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in \mathbb{K}^{n \times m}$ überführen, die in <u>Zeilenstufenform</u> (ZSF) ist. Dabei heißt

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

in <u>Zeilenstufenform</u>, falls es ein $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$ und $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq m$ gibt mit
(i) für $j = 1, 2, \ldots, r$ gilt $c_{jk} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots, k_j - 1$ und $\gamma_j := c_{jk_j} \neq 0$;
(ii) für $j = r+1, \ldots, n$ gilt $c_{jk} = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots, m$.