Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

WS 2014/15
20.11.2014

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^5}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$; **b)** $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + (\frac{3+4i}{15})^n & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$

Aufgabe 2

Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$: $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.
Hinweis: Versuchen Sie, mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung zu argumentieren.

Aufgabe 3

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze die konvergenten Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Folgt hieraus die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn die drei Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3n-1}}{3^{2n+1}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$