

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

a) $\int \arcsin x \, dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$ c) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} \, dx$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie folgende Integrale.

a) $\int_0^1 (1+2x)^3 \, dx$ b) $\int_{-2}^2 |x-1| \, dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$
d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} \, dx$ e) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} \, dt$ f) $\int_1^e x \ln x \, dx$
g) $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \, dx \quad (k \in \mathbb{Z})$ h) $\int_0^\pi (\sin x)^2 \, dx$ i) $\int_1^4 \arctan \sqrt{\sqrt{x}-1} \, dx$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} \, dx$ b) $\int_0^\infty \frac{y \ln y}{\sinh y - y} \, dy$
c) $\int_0^\infty e^{sx} \cos(tx) \, dx \quad (s < 0, t \in \mathbb{R})$ d) $\int_0^\infty e^{-t} \ln(1+t) \, dt$

Aufgabe 4

Es sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das uneigentliche Integral

$$I_n(\lambda) := \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} \, dx$$

konvergiert, und berechnen Sie $I_n(\lambda)$.

Hinweis: Drücken Sie $I_n(\lambda)$ mittels $I_n(1)$ aus und finden Sie mit Hilfe von partieller Integration eine Rekursionsformel, wie man $I_{n+1}(1)$ berechnen kann, wenn $I_n(1)$ bekannt ist.

Aufgabe 5

a) Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

i) $\int_{-1}^1 \ln |x| dx$

ii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$

b) Existieren die folgenden Grenzwerte?

i) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln |x| dx + \int_{\varepsilon}^1 \ln |x| dx \right)$

ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right)$