Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

13. Tutoriumblatt

UVR bedeutet Untervektorraum=Unterraum

Aufgabe 1

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $V_1 \cup V_2$ ist im allgemeinen kein Untervektorraum von V.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V.

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V:

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

1) $x + y \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $x + y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $x + y \in V_1 \cap V_2$.

2) $\alpha x \in V_1$ [da V_1 UVR von V] und $\alpha y \in V_2$ [da V_2 UVR von V], also $\alpha x \in V_1 \cap V_2$.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \operatorname{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \ \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad \text{sowie} \qquad V_2 := \operatorname{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2, nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Jede Menge M von Vektoren aus V mit $0 \in M$ ist linear abhängig.

b) Ist $M := \{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig, so lässt sich jeder Vektor aus M als Linearkombination der anderen Vektoren aus M darstellen.

c) Falls $\operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{lin}(v_1, v_2)$, sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$.

a) Ist $M \subset V$ mit $0 \in M$, so gilt $\operatorname{lin}(M) = \operatorname{lin}(M \setminus \{0\})$. Daher ist M linear abhängig.

b) Diese Aussage ist falsch. Beispielsweise ist $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2 = V$ linear abhängig, jedoch kann $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination des Nullvektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden, d.h. es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Da $v_3 \in \operatorname{lin}(v_1, v_2, v_3) = \operatorname{lin}(v_1, v_2)$ existieren $a_1, a_2 \in K$ mit $v_3 = a_1 v_1 + a_2 v_2$. Daraus folgt $a_1 v_1 + a_2 v_2 - v_3 = 0$. Deshalb sind v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

Aufgabe 3

Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.

Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Zu zeigen es gibt $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung gibt das System der Gleichungen

$$a_1 + a_3 = x$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = y$$

$$a_2 + a_3 = z.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt $a_1 = y - z$. Aus den ersten zwei Gleichungen folgt $a_2 = y - x$. Da $a_1 + a_3 = x \implies a_3 = x - a_1$ bekommen wir $a_3 = x - (y - z) = x - y + z$. Die a_1, a_2, a_3 die wir bestimmt haben sind Lösungen des Systems. Also ist jeder Vektor in $\mathbb{R}^3$ eine Linearkombination von b_1, b_2, b_3. Also gilt $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3) = \mathbb{R}^3$.