Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2016/17
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Funktion $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ist als Komposition stetiger Funktionen überall dort stetig, wo sie definiert ist, d.h. außerhalb der Nullstellenmenge des Nenners — vorausgesetzt, der Bruch ist vollständig gekürzt! Hier haben wir $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$. Also ist $x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ stetig und daher ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$ stetig. Nun gilt $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = f(1)$, also ist f auch in der Stelle 1 stetig. Da aber 3 eine Nullstelle des Nenners im vollständig gekürzten Bruch $\frac{x-2}{x-3}$ ist, existiert $\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{x-2}{x-3}$ nicht, und f ist in 3 unstetig (unabhängig davon, was der Funktionswert $f(3)$ tatsächlich ist).

b) Wegen $x^2+2x-15 = (x-3)(x+5)$ ist dieser Ausdruck für $x \in [-7,-5]$ positv, x^3 hingegen negativ, also gilt $f(x) = x^3$ für $x \in [-7,-5]$. Für $x \in [0,3]$ ist $(x-3)(x+5)$ negativ und x^3 positiv, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [0,3]$. Für $x \in [-1,0)$ ist $x^3 \in [-1,0)$, aber $x^2+2x-15 \leqslant 1+0-15 = -14$, also gilt $f(x) = x^2+2x-15$ für $x \in [-1,0)$. Das Minimum zweier stetiger Funktionen g und h ist als Komposition stetiger Funktionen stetig: $\min\{g,h\} = \frac{g+h-|g-h|}{2}$. Daher ist f jedenfalls außerhalb $\{-5,-1\}$ stetig. Da $x^2+2x-15$ und $x+5$ in -1 nicht denselben Wert annehmen sowie x^3 und $x+5$ an der Stelle -5 verschieden sind, ist f an jenen Stellen auch nicht stetig.

Aufgabe 2

a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1,1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-(1-x^2)}{x(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \,. \tag{1}$$

Demnach gilt $\lim_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$: Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \overset{(1)}{=} \frac{|x|}{1+\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant 0}} \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in [-1,1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Nun zeigen wir $[-1,1] \subset f([-1,1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1,1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1,1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : \; x \in [-1,1]\} = f([-1,1])$. Da $y_0 \in [-1,1]$ beliebig war, folgt $[-1,1] \subset f([-1,1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1,1]) = [-1,1]$.

c) Um die Existenz der Umkehrfunktion von f nachzuweisen, verwenden wir folgendes Resultat: Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Gelingt es, die Gleichung $y = f(x)$ durch Äquivalenzumformungen (!) in die Form $x = g(y)$ zu bringen (wobei $x \in X$, $y \in Y$ und $g : Y \to X$), dann ist f bijektiv und die Umkehrfunktion von f lautet g.

Für $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \iff \quad 1 - xy = \sqrt{1-x^2} \\
&\overset{1-xy\geqslant 0}{\iff} \quad 1 - 2xy + x^2y^2 = 1 - x^2 \quad \iff \quad x^2(1+y^2) = 2xy \\
&\overset{x\neq 0}{\iff} \quad x(1+y^2) = 2y \quad \iff \quad x = \frac{2y}{1+y^2}\,.
\end{aligned}
$$

Für $x = 0$ gilt $y = f(0) = 0$, also gilt auch hier $x = \frac{2y}{1+y^2}$. Die Rechnung zeigt: f besitzt eine Umkehrfunktion, die durch

$$
f^{-1} : \underbrace{[-1,1]}_{=f([-1,1])} \to [-1,1],\ y \mapsto \frac{2y}{1+y^2}
$$

gegeben ist.

d) Seien $x_1, x_2 \in [-1,1]$ mit $x_1 < x_2$. Zu zeigen ist $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$. Dies ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(x_2) - f^{-1}(x_1) &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} - \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2(1+x_1^2) - 2x_1(1+x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2 - x_1 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \\
&= \frac{2(x_2 - x_1 + x_1x_2(x_1 - x_2))}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} = \frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} > 0\,,
\end{aligned}
$$

denn wegen $-1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ ist $x_1x_2 < 1$.

e) Da f^{-1} die Umkehrfunktion von f ist, ist f die Umkehrfunktion von f^{-1}. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, ist es ihre Umkehrfunktion f nach Satz 8.10 auch.

Aufgabe 3

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x+y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$
\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\, \cos y + \sin y\, \cos x}{\cos x\, \cos y - \sin x\, \sin y} = \frac{\cos x\, \cos y\,(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y})}{\cos x\, \cos y\,(1 - \frac{\sin x\, \sin y}{\cos x\, \cos y})} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\, \tan y}\,.
$$

b) Gemäß Vorlesung ist $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion von tan heißt Arcustangens $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Also gilt

$$
\begin{aligned}
\arctan(\tan(x)) &= x \qquad \text{für alle } x \in (-\pi/2, \pi/2), \\
\tan(\arctan(y)) &= y \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Nun seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|\arctan x + \arctan y| < \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $X := \arctan(x), Y := \arctan(y)$. Mit Hilfe der Identität $\tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\, \tan Y}$ aus Teil a) erhalten wir

$$
X + Y = \arctan\bigl(\tan(X+Y)\bigr) = \arctan\Bigl(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\, \tan Y}\Bigr) = \arctan\Bigl(\frac{x+y}{1-xy}\Bigr)\,.
$$

c) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$
\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y\,.
$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$
(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx)\,.
$$

Aufgabe 4

a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} 2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(\tfrac{1}{2} - 2^4) = 3^x(\tfrac{1}{3} - 3) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^x(-\tfrac{31}{2}) = 3^x(-\tfrac{8}{3}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\ln \frac{16}{93}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}. \end{aligned}$$

b) Die Identität $\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2 - \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ folgt sofort aus

$$\log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \log_2\big((\sqrt{7} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})\big) = \log_2(7 - 3) = \log_2(4) = 2.$$

Aufgabe 5

Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leqslant x^n \,,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x \to 0} 0 = f_n(0)$ folgt.
Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x^{n-1} \sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geqslant 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x \to 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \to 0$ $(k \to \infty)$, aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \to \infty$ nicht.

Aufgabe 6

Seien $\alpha > 1$, $C > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x - y|^\alpha \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) = 0$. Es gilt

$$0 \leqslant \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leqslant \lim_{x \to x_0} \frac{C\,|x - x_0|^\alpha}{|x - x_0|} = C \lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{\alpha - 1} = 0$$

wegen $\alpha - 1 > 0$. Damit ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,,$$

d.h. f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = 0$.
Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.