

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 15. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

i) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$\det(A) = +2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinante ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

ii) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2(1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1) - 2(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) + 4(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = -4. \end{aligned}$$

b) Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz. [Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\begin{aligned} \det(A) &=_{[S_1 \rightarrow S_1 + S_2]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_1]} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1]} 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2((-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2) = 16. \end{aligned}$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\begin{aligned} \det(B) &=_{[Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =_{[S_j \rightarrow S_j - S_1, j=2,3,4]} \det \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =_{[Z_1 \rightarrow Z_1 + Z_3]} 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -5(8 + 1) = -45. \end{aligned}$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\begin{aligned} \det(C) &=_{[Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_4]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} =_{[S_4 \rightarrow S_4 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 3 \end{pmatrix} =_{[S_3 \rightarrow S_3 - S_1]} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} \\ &=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha - 4 \end{pmatrix} = \alpha - 4 - 1 = \alpha - 5. \end{aligned}$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 2

- a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ nach \mathbb{C} .
Nein (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. [Verwende n -mal (D2)]
- b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1} A^T A^2 A^T A^{-1}) = (\det A)^2$.
Ja, denn für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz

$$\begin{aligned} \det(A^{-1} A^T A^2 A^T A^{-1}) &= \det(A^{-1}) \det(A^T) \det(A^2) \det(A^T) \det(A^{-1}) \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det(A) (\det(A))^2 \det(A) \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^2. \end{aligned}$$

- c) $\det(A + B) = \det A + \det B$?
Nein (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B , etwa $A = 0$).
 Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 2^2 \det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.
- d) $\det((\det A)B) = (\det A)^n \det B$?
Ja. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a**)-Teil).

Aufgabe 3

Mit $A = (a_1, a_2, a_3)$ bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix des gegebenen linearen Gleichungssystems, mit b die rechte Seite. Die Cramersche Regel ist nur anwendbar, wenn A regulär ist; wegen

$$\det(A) =_{\substack{[Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1 \\ [Z_3 \rightarrow Z_3 - 2Z_1]}} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } S_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \rightarrow Z_2 + Z_1]} \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

ist dies der Fall. Nach der Cramerschen Regel gilt dann

$$x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(a_1, b, a_3)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, b)}{\det(A)}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{[Z_3 \rightarrow Z_3 + Z_1]}{=} -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{[Entw. \text{ nach } S_1]}{=} -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Auch bei x_2 und x_3 addieren wir jeweils die erste Zeile zur dritten und entwickeln dann nach der zweiten bzw. dritten Spalte:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}, \\ x_3 &= -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Also ist $(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{13}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{3}\right)$ die eindeutig bestimmte Lösung des gegebenen Systems.