Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
27.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

6. Übungsblatt

Aufgabe 33: Cauchysches Verdichtungskriterium
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei a_n eine monotone fallende Nullfolge, d.h., $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ für $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \text{konvergiert}\,.$$

Hinweis: Vergleichen Sie die folgende Reihen :

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots \\ &a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_8 + \dots \\ &a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + \dots \end{aligned}$$

Aufgabe 34: Oszillationen Helfen (zumindest bei der Konvergenz....)

(a) Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ komplexe Folgen und $B_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$, $B_0 := 0$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = a_{n+1} B_n + \sum_{k=1}^{n} B_k (a_k - a_{k+1})$$

Hinweis: Man nennt diesen Trick “Partielle Summation”.

(b) Zeigen Sie: Sei $(B_n)_n$ eine beschränkte Folge, d.h., $\exists M \geq 0 : \forall n : |B_n| \leq M$, und $(a_n)_n$ eine monotone fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

(c) Sei a_n eine monotone fallende Nullfolge und $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$ und $z \neq 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(d) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe und $(b_n)_n$ eine beschränkte monotone Folge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.
Hinweis: Wenn $(b_n)_n$ eine wachsende konvergente Folge mit Grenzwert b ist, dann ist $d_n = b - b_n$ eine fallende Nullfolge .

(e) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\sqrt{n}}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 35:

(a) Konstruieren Sie eine positive Nullfolge, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergiert.

(b) Warum ist Ihr Beispiel nicht im Konflikt mit dem Leibniz-Kriterium?

— Bitte wenden! —

Aufgabe 36:
Ein Zug fährt in die Richtung einer Mauer mit 100 km/h. Als er 2 km Abstand zu der Mauer hat, beginnt eine (sehr schnelle) Fliege zwischen dem Zug und der Mauer hin und her zu fliegen mit der Geschwindigkeit von 200 km/h. (Wir nehmen an, dass das Umkehren der Fliege an der Mauer und dem Zug keine Zeit dauert). Wie weit fliegt die Fliege ingesamt, bevor sie zwischen Zug und Mauer zerquetscht wird?

Aufgabe 37:
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Wert der Reihe.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1-\frac{n}{e})e^{-n}}{n(n+1)}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{(1+2|x|)^{n-1}}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 33 und 34 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.