Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

WS2017/18
18.12.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Physik

9. Übungsblatt

Aufgabe 48:

(a) Zeigen Sie, dass für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ der Abstand der Punkte $e^{i\varphi}$ und $e^{i\psi}$ durch

$$\left|e^{i\varphi} - e^{i\psi}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right|$$

gegeben ist.

(b) Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zeiten Sie, dass die n-ten Einheitswurzeln — also Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ für $z \in \mathbb{C}$ — ein n-Eck mit Umfang $L_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ bilden.

(c) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi.$$

(d) Interpretieren Sie die letzte Gleichung und zeichnen Sie für $n = 6$ ein Bild.

Aufgabe 49:

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Wie soll man f in $x = 0$ definieren so, dass f stetig ist. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ mit dieser Wahl von $f(0)$ stetig ist.

(i) $f(x) = \sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$,

(ii) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+3x^2}$.

Aufgabe 50:

Beweisen Sie die folgende Aussage

(a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, dann ist g stetig.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $|f|$ auch stetig.

Aufgabe 51:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$ und $\lim_{x\to 0} = 0$. Wie klein muss $\delta > 0$ sein so, dass $|x| < \delta$ auch $|f(x)| < \epsilon$ folgt. Finden Sie δ als Funktion von ϵ, wobei Sie $\epsilon < 4$ voraussetzen können.

Aufgabe 52:

Sei $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Beweisen Sie, dass $c \in [a, b]$ existiert so, dass $f(c) = g(c)$ gilt.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 53:
Sei $D := \{z \in \mathbb{C} | \cos(z) \neq 0\}$ und $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie

(i) $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$,

(ii) $\cos(2x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

für alle $x \in D \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 54:
Beweisen Sie die folgende Identitäten mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,

(ii) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$,

(iii) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,

(iv) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$,

(v) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,

(vi) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(vii) $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$,

(viii) $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$,

(ix) $\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ mit $\cos x \neq -1$,

(x) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

(xi) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

(xii) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$,

(xiii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

(xiv) $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgabe 48, 49, 50, 51 und 52 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.