Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
03.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 12

Sei $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Die Leibnizformel für Determinanten besagt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}.$$

Die Elemente der S_3 sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme das Signum (Vorzeichen) von σ_i $(i = 1, \ldots, 6)$. Es gilt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Nach Bemerkung a) in 17.7 gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$, wobei m die Anzahl der Paare (i,j) mit $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

Somit ergibt sich $\operatorname{sgn}(\sigma_1) = 1$ und da $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ Transpositionen sind, d.h. zwei Zahlen miteinander vertauschen gilt nach Bsp. (1) in 17.7: $\operatorname{sgn}(\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_3) = \operatorname{sgn}(\sigma_4) = 1$. Für σ_5 sind die Paare mit (i,j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gerade $(1,3)$ und $(2,3)$, also ist $\operatorname{sgn}(\sigma_5) = 1$; für σ_6 sind die Paare mit dieser Eigenschaft $(1,2)$ und $(1,3)$, also gilt wieder $\operatorname{sgn}(\sigma_6) = 1$.

Die Leibnizformel ergibt nun:

$$\det(A) = +2 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4.$$

Bemerkung: Diese Methode zur Berechnung der Determinente ist recht ineffizient und wird daher kaum genutzt.

b) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(A) &= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\big(1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1\big) - 2\big(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1\big) + 4\big(-1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1\big) = -4. \end{aligned}$$

c) Wir ersetzen die 2. Spalte durch die Summe der 1. und 2. Spalte und entwickeln die resultierende Matrix nach der 2. Spalte:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4(-1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1) = -4.$$

Aufgabe 13

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.
Falsch (außer für $n = 1$). Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$. (Verwende n-mal (D2))

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) = (\det A)^2$.
Richtig, denn für eine reguläre Matrix A gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz 17.9

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) &= \det(A^{-1})\ \det(A^\top)\ \det(A^2)\ \det(A^\top)\ \det(A^{-1})\\ &= \frac{1}{\det(A)}\ \det(A)\,(\det(A))^2\ \det(A)\ \frac{1}{\det(A)} = (\det(A))^2\,.\end{aligned}$$

c) $\det(A + B) = \det A + \det B$
Falsch (außer für $n = 1$ oder besonders ausgewählte Matrizen A und B, etwa $A = 0$).
Zum Beispiel ist $\det(I_2 + I_2) = \det(2I_2) = 4\det I_2 = 4 \neq 2 = \det I_2 + \det I_2$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$
Richtig. $\det A$ ist ja nur eine Zahl (vgl. Erläuterung im **a)**-Teil).

Aufgabe 14

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.

$$\det(A) \overset{\substack{Z_i\to Z_i+Z_4\\ i=1,2,3}}{=} \det\begin{pmatrix}2&2&0&0\\2&0&2&0\\2&0&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 2^3\cdot\det\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{S_1\to S_1-S_2-S_3-S_4}{=} 8\cdot\det\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&1&1&1\end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach } S_1}{=} 8\cdot(-1)^{4+1}\cdot(-2)\det(I_3) = 16$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) \overset{Z_1\to Z_1+Z_4}{=} \det\begin{pmatrix}5&5&5&5\\-1&0&1&1\\3&-1&4&0\\4&3&2&1\end{pmatrix} \overset{\substack{S_j\to S_j-S_1\\ j=2,3,4}}{=} \det\begin{pmatrix}5&0&0&0\\-1&1&2&2\\3&-4&1&-3\\4&-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach } Z_1}{=} 5\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&2\\-4&1&-3\\-1&-2&-3\end{pmatrix} \overset{Z_1\to Z_1+Z_3}{=} 5\cdot\det\begin{pmatrix}0&0&-1\\-4&1&-3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach } Z_1}{=} 5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-4&1\\-1&-2\end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) \overset{\substack{Z_1\to Z_1-Z_4\\ Z_4\to Z_4-Z_2}}{=} \det\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&2\\1&0&1&2\\2&0&1&\alpha-2\end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach } S_2}{=} 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&1&\alpha-2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{S_1\to S_1-S_2\\ S_3\to S_3-2S_2}}{=} \det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&\alpha-4\end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach } Z_2}{=} 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\1&\alpha-4\end{pmatrix} = \alpha-4-1 = \alpha-5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha \neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{5\}$ regulär.

Aufgabe 15

a) Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (\alpha-6)(\alpha+9)\cdot 0 + (17-\alpha)(\alpha+5)(-7-\alpha) + (2\alpha-1)(-2)(2\alpha+14) \\
&\quad - (2\alpha-1)(\alpha+9)(-7-\alpha) - (\alpha+5)(2\alpha+14)(\alpha-6) - (17-\alpha)(-2)\cdot 0 \\
&= (\alpha+7)\left[-(17-\alpha)(\alpha+5) - 4(2\alpha-1) + (2\alpha-1)(\alpha+9) - 2(\alpha+5)(\alpha-6)\right] \\
&= (\alpha+7)\left[(\alpha+5)(-17+\alpha-2\alpha+12) + (2\alpha-1)\underbrace{(-4+\alpha+9)}_{\alpha+5}\right] \\
&= (\alpha+7)(\alpha+5)(-5-\alpha+2\alpha-1) = (\alpha+5)(\alpha-6)(\alpha+7)
\end{aligned}$$

Somit ist A singulär, falls $\alpha \in \{-7,-5,6\}$ gilt.

b) Mit Hilfe von Zeilen- und Spaltenumformungen sowie dem Entwicklungssatz erhalten wir:

$$\det(A) \overset{S_2\to S_2+2S_1}{=} \det\begin{pmatrix} \alpha-6 & \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ -2 & \alpha+5 & \alpha+5 \\ -\alpha-7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. nach } Z_3}{=} (-\alpha-7)\det\begin{pmatrix} \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ \alpha+5 & \alpha+5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_2\to Z_2-Z_1}{=} -(\alpha+7)\det\begin{pmatrix} \alpha+5 & 2\alpha-1 \\ 0 & 6-\alpha \end{pmatrix} = (\alpha+5)(\alpha-6)(\alpha+7)$$

Wie in **a)** können wir ablesen, dass A regulär ist für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-7,-5,6\}$.

Aufgabe 16

a)

$$\begin{aligned}
D_1(x) &= \det(a_0) = a_0 \\
D_2(x) &= \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = a_0x + a_1 \\
D_3(x) &= \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix} = a_0x^2 + a_2 + a_1x = a_0x^2 + a_1x + a_2
\end{aligned}$$

b) Vermutung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $D_{n+1}(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}$. Wir beweisen die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

Den Induktionsanfang haben wir schon in Teil **a)** gezeigt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Für dieses n gelte

$$D_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k} \qquad \text{(IV)}.$$

Dann folgt:

$$D_{n+2}(x) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_{n+1} \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & x \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach } S_{n+2}}{=} (-1)^{n+2+1} a_{n+1} \det \begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+2+n+2} x D_{n+1}(x)$$

$$= (-1)^{n+1} a_{n+1} (-1)^{n+1} + x D_{n+1}(x) \overset{\text{(IV)}}{=} a_{n+1} + x \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

$$= a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{n+1-k}.$$

Somit ist unsere Vermutung bewiesen.

c) Wählen wir in der gegebenen Matrix $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = x = -1$, so gilt:

$$\det(B_{n+1}) = (-1)^{n+1} D_{n+1}(-1) \overset{\textbf{b)}}{=} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)(-1)^{n-k}$$
$$= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die Matrix B_{n+1} ist also invertierbar, falls n gerade ist. Man kann an der Matrix auch ablesen, dass für ungerades n die 1. Zeile die Summe der $2., 4., \ldots$ und $(n+1)$-ten Zeile ist und die Matrix in diesem Fall nicht invertierbar sein kann.

Aufgabe 17

a)

$$\det(A_\alpha) = \det \begin{pmatrix} \alpha - 2 & \alpha - 1 & -(\alpha - 1) \\ 3(2-\alpha) & (\alpha+1)(\alpha-1) & (\alpha-1) \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{(D2)}}{=} (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$
$$\overset{\substack{S_1 \to S_1 + S_3 \\ S_2 \to S_2 + S_3}}{=} (\alpha-2)(\alpha-1)^2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \alpha+2 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Entw. nach } S_2}{=} (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

Die Matrix A_α ist also invertiervar für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

b) Cramersche Regel: Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar, $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n)$, so sind die Komponenten der Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ (mit $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$) gegeben durch

$$x_j = \frac{\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{b}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n)}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Um die Lösung des gegebenen linearen Gleichungssystems zu berechnen, benötigen wir also die folgenden Determinanten:

$$
\begin{aligned}
D_1 &:= \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ 0 & (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. nach } S_1}{=} (\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-1 & -(\alpha-1) \\ (\alpha+1)(\alpha-1) & \alpha-1 \end{pmatrix} = (\alpha-1)^3(\alpha+2) \\
D_2 &:= \det \begin{pmatrix} \alpha-2 & 0 & -(\alpha-1) \\ 3(2-\alpha) & 0 & \alpha-1 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. nach } S_2}{=} -(\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-2 & -(\alpha-1) \\ -3(\alpha-2) & \alpha-1 \end{pmatrix} = 2(\alpha-1)^2(\alpha-2) \\
D_3 &:= \det \begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 & 0 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) & 0 \\ (\alpha-2)(\alpha+1) & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Entw. nach } S_3}{=} (\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-2 & \alpha-1 \\ -3(\alpha-2) & (\alpha+1)(\alpha-1) \end{pmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)
\end{aligned}
$$

Für die Komponenten des Lösungsvektors folgt also

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{D_1}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^3(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha-1}{\alpha-2} \\
x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\alpha)} = \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha+2)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{2}{\alpha+2} \\
x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\alpha)} = \frac{(\alpha-1)^2(\alpha-2)(\alpha+4)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{\alpha+4}{\alpha+2}.
\end{aligned}
$$