Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
10.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 18

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} \overset{Z_1\to Z_1-Z_2}{=} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{S_1\to S_1+S_2}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. n. } Z_1}{=} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $A\vec{x} = 18\vec{x}$ bzw. $(A - 18I_3)\vec{x} = \vec{0}$, also genau $\operatorname{Kern}(A - 18I_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3\to Z_3-\frac{1}{2}Z_1]{Z_2\to Z_2-Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to \frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \operatorname{Kern}(A - 18I_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar, d.h. es gibt keine reguläre Matrix $S_A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ so, dass $S_A^{-1}AS_A$ eine Diagonalmatrix ist.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1\to Z_1+(1-\lambda)Z_3 \\ Z_2\to Z_2+2Z_3}}{=} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. n. } S_1}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2-2)(1-\lambda).$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.

Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - I_3)\vec{x} = \vec{0}$:

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_2 + 2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -Z_1,\, Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat, erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Basisvektoren als Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ in eine Matrix S. Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{s}_j$, so erhält man $BS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1\vec{s}_1, \lambda_2\vec{s}_2, \ldots, \lambda_n\vec{s}_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}BS = D$. Definieren wir

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} - 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dann gilt} \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Wahl von S ist nicht eindeutig, so ergibt sich z.B. für

$$\widetilde{S} := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 & 0 & -\sqrt{2} - 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}: \qquad \widetilde{S}^{-1}B\widetilde{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19

Es gilt

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. } Z_2}{=} (\alpha - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Entw. } Z_1}{=} (\alpha - \lambda)(-\lambda) \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 \lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 4. Für den zugehörigen Eigenraum $E_A(0)$ ergibt sich

$$E_A(0) = \operatorname{Kern}(A - 0I_4) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Also ist $\dim E_A(0) \neq 4$ und somit ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.

Fall 2: $\alpha \neq 0$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha$ jeweils Eigenwerte von A mit der algebraischen Vielfachheit 2. Um $\dim E_A(0)$ zu ermitteln, könnte man wie im vorigen Fall $E_A(0)$ explizit angeben und die Dimension ablesen. Alternativ schließen wir aus

$$\dim \operatorname{Bild}(A - 0I_4) = \operatorname{rang}(A - 0I_4) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

mit der Dimensionsformel $\dim E_A(0) = \dim \operatorname{Kern}(A - 0I_4) = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \operatorname{Bild}(A - 0I_4) = 4 - 2 = 2$. Somit stimmt für den Eigenwert 0 geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Ferner ist

$$\dim \operatorname{Bild}(A - \alpha I_4) = \operatorname{rang}(A - \alpha I_4) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \stackrel{\alpha \neq 0}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4, \end{cases}$$

woraus

$$\dim E_A(\alpha) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

folgt. Also ist nur für $\alpha = 4$ geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts α identisch.

Fazit: A ist genau für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Aufgabe 20

Das System

$$u' = 8u - 6v,$$
$$v' = 9u - 7v$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Da die 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A diagonalisierbar. Die Eigenräume von A lauten

$$E_A(-1) = \operatorname{Kern}(A + I_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

und

$$E_A(2) = \operatorname{Kern}(A - 2I_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich daher

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Die bekannte Formel für die Inversion einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0)$$

führt auf

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \quad &\iff \quad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \text{ und } \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\iff \quad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \text{ und } \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).

Aufgabe 21

a) Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} &\overset{\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}}{=} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ \overset{S_2 \to S_2 + S_4}{=} \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} &\overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{nach } Z_4}}{=} (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ \overset{S_2 \to S_2 - S_3}{=} (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} &\overset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{nach } Z_3}}{=} (4-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ = (4-\lambda)^2 \left((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\right) = (4-\lambda)^2 \left(\lambda^2 - 4\lambda\right) = \lambda(\lambda - 4)^3. \end{aligned}$$

Die Matrix besitzt also die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 3.
Als nächstes bestimmen wir die Eigenräume. Es gilt $E_A(\lambda_i) = \text{Kern}(A - \lambda_i I_4),\ i = 1, 2$. Wir formen die Matrix $A - \lambda_1 I_4$ mit Hilfe von Zeilenumformungen um:

$$A - 0 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_2]{\substack{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_3}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_i \to Z_i/4 \\ i=3,4}]{Z_1 \to (Z_1 + 2Z_3)/4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_4 \to Z_4 - Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - Z_1}]{Z_2 \to Z_2 - 3Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit dem (-1)-Trick können wir nun den Eigenraum ablesen. Es gilt: $E_A(0) = \text{Kern}(A) = \text{lin}\{\vec{c}_1\}$ wobei $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Um $E_A(4)$ zu bestimmen, gehen wir genauso vor:

$$A - 4I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier gilt nun $E_A(4) = \text{lin}\{\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$ mit $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ linear unabhängig sind, ist $C := (\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3\ \vec{c}_4)$ eine reguläre Matrix mit $C^{-1}AC = D$ und $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Werten $0, 4, 4, 4$ auf der Diagonalen. Um eine orthogonale Matrix P mit $P^T AP = D$ zu finden, müssen wir ein Orthonormalsystem $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ aus Eigenvektoren von A gewinnen. Da nach dem Satz in 18.7. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, können wir die beiden Eigenräume unabhängig voneinander behandeln. In $E_A(0)$ ist ein Orthonormalsystem gegeben durch $\vec{p}_1 := \frac{\vec{c}_1}{\|\vec{c}_1\|} = \frac{1}{2}\vec{c}_1$.
Nun zu $E_A(4)$: Wir stellen zunächst fest, dass die Vektoren $\vec{c}_2, \vec{c}_3 + \vec{c}_4$ und $\vec{c}_4$ auch eine Basis von $E_A(4)$ bilden und dass die Vektoren $\vec{c}_2$ und $\vec{c}_3 + \vec{c}_4$ orthogonal zueinander sind. Wir verwenden das Verfahren von Gram-Schmidt, um aus diesen drei Vektoren eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$ zu gewinnen:

$$\vec{p}_2 := \frac{\vec{c}_2}{\|c_2\|} = \frac{\vec{c}_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_3 := \frac{\vec{c}_3 + \vec{c}_4}{\|\vec{c}_3 + \vec{c}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 := \vec{c}_4 - (\vec{c}_4|\vec{p}_2)\,\vec{p}_2 - (\vec{c}_4|\vec{p}_3)\,\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_4 := \frac{\vec{v}_4}{\|\vec{v}_4\|} = \vec{v}_4$$

Nach Konstruktion sind $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ eine Orthonormalbasis von $E_A(4)$ und eine Matrix P mit $P^TAP = D$ ist gegeben durch

$$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3\ \vec{p}_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Aus $P^TAP = D$ folgt unmittelbar $A = PDP^T = PDP^{-1}$ und folglich

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}.$$

Da D eine Diagnoalmatrix ist, folgt

$$D^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} = 4^{k-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4^{k-1}D$$

also $A^k = 4^{k-1}PDP^{-1} = 4^{k-1}A$.

Aufgabe 22

a) Die Aussage ist **richtig**. Ist A unitär und λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}$, so gilt zum einen $(A\vec{v}|A\vec{v}) = (\vec{v}|\vec{v}) = \|\vec{v}\|^2$ (hier haben wir benutzt, dass A unitär ist). Andererseits gilt aber auch: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, also $(A\vec{v}|A\vec{v}) = (\lambda\vec{v}|\lambda\vec{v}) = |\lambda|^2(\vec{v}|\vec{v}) = |\lambda|^2\|\vec{v}\|^2$. Zusammen ergibt sich $\|\vec{v}\|^2 = |\lambda|^2\|\vec{v}\|^2$ und da $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A und somit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist, folgt $|\lambda|^2 = 1$.

b) Diese Aussage ist im Allgemeinen **falsch**. Betrachte z.B. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte von B sind die Nullstellen von $\det(B - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$, also $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = +i$.

Beachte: Symmetrische Matrizen besitzen nur reelle Eigenwerte (Satz in 18.7.) und auch falls n ungerade ist, muss es immer einen reellen Eigenwert geben: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert von B (mit Eigenvektor v), so ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von B (mit Eigenvektor $\bar{v}$), d.h. komplexe Eigenwerte - reeller Matrizen! - tauchen immer in Paaren auf (und haben die gleiche algebraische Vielfachheit). Da die Summe der algebraischen Vielfachheiten n ergibt, muss es mind. einen reellen Eigenwert geben (sonst wäre die Summe der Vielfachheiten gerade).

c) Die Aussage ist **richtig**: Ist $\vec{v}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt: $A^2\vec{v} = AA\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$.