

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
12. Übungsblatt

Aufgabe 60

- a) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ auf dem Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - i| < 2\}$ in eine Laurentreihe.
- b) Entwickeln Sie die durch $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ gegebene Funktion auf dem Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$ in eine Laurentreihe.

Aufgabe 61

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von f sowie die Residuen in diesen Punkten.

- a) $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ b) $f(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}$

Aufgabe 62

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

- a) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$ b) $\oint_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$
- c) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz$ d) $\oint_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$
- e) $\oint_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz$, wobei $G := \{z \in \mathbb{C} \mid -3 < \operatorname{Re} z < 2, -2 < \operatorname{Im} z < 3\}$

Aufgabe 63

Untersuchen Sie, ob sich die durch $f(z) = e^{\sin z}$ definierte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt und für welche z diese gegebenenfalls konvergiert. Berechnen Sie dann

$$\oint_{|z|=1/2} z e^{\sin(1/z)} dz.$$

Aufgabe 64

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2 \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

der Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen, die u als Realteil haben.

Aufgabe 65

- a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i, \quad i^{(i^i)}, \quad (\operatorname{Log} i)^i.$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{Log} z$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^α sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

- b) Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{1/z} = i$.

Aufgabe 66

Die Möbiustransformation f ist gegeben durch $f(z) = \frac{i-z}{1+z}$. Bestimmen Sie, worauf die Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, die reelle Achse sowie die imaginäre Achse durch S abgebildet werden.

Aufgabe 67

Bestimmen Sie für die Möbiustransformation $f(z) = \frac{z}{1-z}$ die Bilder von allen Kreisen um den Nullpunkt mit Radius $1 \leq r \leq 2$.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**

Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/>.