Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
12.07.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 68

a) Für $\xi \neq 0$ gilt

$$\mathscr{F} f(\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{1}{-i\xi}\, e^{-i\xi x}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{1}{i\xi}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right) = 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi}\,.$$

Für $\xi = 0$ ist

$$\mathscr{F} f(0) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2\,.$$

b) Definitionsgemäß gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x} e^{-i\xi x}\, dx + \int_{-\infty}^{0} x e^{x} e^{-i\xi x}\, dx\,.$$

Wegen $\int x e^{\alpha x}\, dx = x e^{\alpha x}/\alpha - \int e^{\alpha x}/\alpha\, dx = x e^{\alpha x}/\alpha - e^{\alpha x}/\alpha^2$ erhält man für $c > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^c x e^{-x} e^{-i\xi x}\, dx &= \int_0^c x e^{-x(1+i\xi)}\, dx = \left[\frac{x e^{-x(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} - \frac{e^{-x(1+i\xi)}}{(1+i\xi)^2}\right]_{x=0}^{c} \\ &= \left(\frac{c e^{-c(1+i\xi)}}{-(1+i\xi)} - \frac{e^{-c(1+i\xi)}}{(1+i\xi)^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{(1+i\xi)^2}\right) \xrightarrow{c\to\infty} \frac{1}{(1+i\xi)^2}\,,\end{aligned}$$

wobei man $\left|e^{-c(1+i\xi)}\right| = e^{-c}$ beachten muss. Für das zweite Integral ergibt sich analog $\int_{-\infty}^{0} x e^{x(1-i\xi)}\, dx = \int_0^\infty (-\tau) e^{-\tau(1-i\xi)}\, d\tau = -(1-i\xi)^{-2}$, d.h. wir haben

$$\mathscr{F} f(\xi) = \frac{1}{(1+i\xi)^2} - \frac{1}{(1-i\xi)^2} = \frac{(1-i\xi)^2 - (1+i\xi)^2}{(1+\xi^2)^2} = \frac{-4i\xi}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

Alternativ: Da $x \mapsto x e^{-|x|}$ absolut integrierbar ist, ist $\mathscr{F}\{e^{-|x|}\}$ nach 23.7 (d) differenzierbar und für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) = \mathscr{F}\{(-ix)e^{-|x|}\}(\xi) = -i\mathscr{F}\{x e^{-|x|}\}(\xi)$$

bzw.

$$\mathscr{F}\{x e^{-|x|}\}(\xi) = i\,\frac{d}{d\xi}\mathscr{F}\{e^{-|x|}\}(\xi) \overset{\text{Bsp. in 23.4}}{=} i\,\frac{d}{d\xi}\frac{2}{1+\xi^2} = \frac{-4i\xi}{(1+\xi^2)^2}\,.$$

c) Wegen $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $x \in \mathbb{R}$, ergibt sich für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\xi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\xi x} \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{i(1-\xi)x} + e^{-i(1+\xi)x}\right) dx\,.$$

Für $\xi \neq \pm 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} f(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1-\xi)}\, e^{i(1-\xi)x} - \frac{1}{i(1+\xi)}\, e^{-i(1+\xi)x}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{i(1-\xi)}\left(e^{i(1-\xi)\frac{\pi}{2}} - e^{-i(1-\xi)\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{i(1+\xi)}\left(e^{-i(1+\xi)\frac{\pi}{2}} - e^{i(1+\xi)\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}\left(-e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} - e^{i\xi\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}(1+\xi)(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}}) - \frac{1}{2}(1-\xi)(-e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} - e^{i\xi\frac{\pi}{2}})}{1-\xi^2} \\
&= \frac{2\,\frac{1}{2}(e^{-i\xi\frac{\pi}{2}} + e^{i\xi\frac{\pi}{2}})}{1-\xi^2} = \frac{2\cos(\xi\frac{\pi}{2})}{1-\xi^2}\,.
\end{aligned}$$

Im Fall $\xi = 1$ ist

$$\mathscr{F} f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + e^{-2ix}\right) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2i}\, e^{-2ix}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

und für $\xi = -1$ gilt

$$\mathscr{F} f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^{2ix} + 1\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\, e^{2ix}\right]_{x=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

d) Wir verwenden das Resultat 23.7 (b) der Vorlesung. Ist

$$g(x) := \begin{cases} \cos(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gesetzt, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Additionstheorem des cos)

$$\begin{aligned}
g(x - \pi/2) &= \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{2}) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= f(x)\,.
\end{aligned}$$

Mit der Rechenregel 23.7 (b) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\xi) = \mathscr{F}\{g(x - \tfrac{\pi}{2})\}(\xi) = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\mathscr{F} g(\xi)\,.$$

Gemäß **c)** gilt für $\xi \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} f(\xi) &= e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\mathscr{F} g(\xi) = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\,\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\xi)}{1-\xi^2} = e^{-i\xi\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}\xi} + e^{-i\frac{\pi}{2}\xi}\right)\frac{1}{1-\xi^2} \\
&= \left(1 + e^{-i\pi\xi}\right)\frac{1}{1-\xi^2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} f(1) &= e^{-i\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}}\mathscr{F} g(1) = -i\,\frac{\pi}{2}\,, \\
\mathscr{F} f(-1) &= e^{-i\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2}}\mathscr{F} g(-1) = i\,\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{(x+2)^2 + 1} = g(x+2)$$

mit

$$g(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Wir berechnen zunächst $\mathscr{F}g$ und argumentieren zur Bestimmung von $\mathscr{F}f$ mit der Verschiebungsregel 23.7 (b) der Fouriertransformation.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := e^{-|x|}$, gilt

$$\mathscr{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist also $\mathscr{F}g = \frac{1}{2}\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}$. h ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Ferner ist $\mathscr{F}h$ absolut integrierbar, denn $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}h(\xi)|\, d\xi = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi = 2\lim_{b\to\infty}[\arctan\xi]_0^b = \pi$. Damit sind die Voraussetzungen der Fourierinversionsformel für h erfüllt. Diese besagt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}h(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\,\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}(-x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$\mathscr{F}g(\xi) = \frac{1}{2}\,\mathscr{F}\{\mathscr{F}h\}(\xi) = \frac{1}{2}\,2\pi\, h(-\xi) = \pi\, e^{-|-\xi|} = \pi\, e^{-|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Schließlich liefert die Verschiebungsregel 23.7 (b)

$$\mathscr{F}f(\xi) = \mathscr{F}\{g(x+2)\}(\xi) = e^{-i\xi(-2)}\mathscr{F}g(\xi) \overset{(*)}{=} \pi\, e^{2i\xi-|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

f) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1} = -\frac{1}{2}\,\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,g'(x)\,,$$

wobei g wie im e)-Teil definiert ist.

Da g stetig, differenzierbar und absolut integrierbar sowie g' stetig und absolut integrierbar ist, gilt nach 23.7 (e)

$$\mathscr{F}f(\xi) = -\frac{1}{2}\,\mathscr{F}g'(\xi) = -\frac{1}{2}\,i\xi\,\mathscr{F}g(\xi) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\,i\xi\pi\, e^{-|\xi|}\,.$$

Aufgabe 69

Zu $\alpha > 0$ definiere

$$\varphi_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\,.$$

Wie in Beispiel 23.8 der Vorlesung gesehen, ist

$$\mathscr{F}\{e^{-x^2/2}\}(\xi) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

bzw. mit $\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$, ausgedrückt

$$\mathscr{F}\varphi_1(\xi) = e^{-\xi^2/2}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x/\sqrt{\alpha})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\varphi_1(x/\sqrt{\alpha})\,, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mit den Rechenregeln der Fouriertransformation folgt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\varphi_\alpha(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathscr{F}\{\varphi_1(x/\sqrt{\alpha})\}(\xi) \overset{23.7\,(a)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\,\mathscr{F}\varphi_1\Big(\frac{\xi}{1/\sqrt{\alpha}}\Big)\\ &= \mathscr{F}\varphi_1(\sqrt{\alpha}\,\xi) = e^{-\alpha\xi^2/2}\,.\end{aligned}$$

Für alle $\alpha, \beta > 0$ sind φ_α, φ_β stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Nach 23.14 ist damit auch $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ stetig, beschränkt und absolut integrierbar, und es gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi) = \mathscr{F}(\varphi_\alpha)(\xi) \cdot \mathscr{F}(\varphi_\beta)(\xi) = e^{-\alpha\xi^2/2} \cdot e^{-\beta\xi^2/2} = e^{-(\alpha+\beta)\xi^2/2} = \mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\xi)\,.$$

Sowohl $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ als auch $\varphi_{\alpha+\beta}$ sind stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Da ferner $\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)$ sowie $\mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})$ absolut integrierbar sind, sind die Voraussetzungen der Inversionsformel 23.10 für die Funktionen $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ bzw. $\varphi_{\alpha+\beta}$ erfüllt. Diese liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\xi)\,d\xi = \varphi_{\alpha+\beta}(x)\,.$$

Aufgabe 70

Sei $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$. Wie in Aufgabe **68 a)** gesehen, gilt für die Fouriertransformierte von f

$$\mathscr{F}f(\xi) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\xi)}{\xi} & \text{für } \xi \neq 0\,, \\ 2 & \text{für } \xi = 0\,. \end{cases}$$

Wir verwenden den Satz von Plancherel: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Für die oben definierte Funktion f sind die Voraussetzungen erfüllt; also gilt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\xi)|^2\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,d\xi$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = \pi\,.$$

Da $\xi \mapsto \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$ eine gerade Funktion ist (denn $\frac{\sin^2(-\xi)}{(-\xi)^2} = \frac{(-\sin(\xi))^2}{\xi^2} = \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$), ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,d\xi$$

und damit

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 71

a) Da $f(x) = 0$ für alle x mit $x^2 > 1 \iff |x| > 1$ gilt, erhalten wir für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f(\xi) = \int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{-i\xi x}\,dx\,.$$

Speziell für $\xi = 0$ ergibt sich

$$\mathscr{F}f(0) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \Big[x - \frac{1}{3}\,x^3\Big]_{x=-1}^{1} = \frac{2}{3} - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = \frac{4}{3}\,.$$

Für $\xi \neq 0$ liefert zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}f(\xi) &= \left[(1-x^2)\cdot\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi}\right]_{x=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\cdot\frac{e^{-i\xi x}}{i\xi}\,dx \\
&= 0 - \left[2x\cdot\frac{e^{-i\xi x}}{-(i\xi)^2}\right]_{x=-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2\,\frac{e^{-i\xi x}}{-(i\xi)^2}\,dx \\
&= -2\,\frac{e^{-i\xi}+e^{i\xi}}{\xi^2} + 2\left[\frac{e^{-i\xi x}}{(i\xi)^3}\right]_{x=-1}^{1} = -\frac{4\cos\xi}{\xi^2} + 2\,\frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i\xi^3} \\
&= -\frac{4\cos\xi}{\xi^2} + \frac{4\sin\xi}{\xi^3} = \frac{-4\xi\cos\xi + 4\sin\xi}{\xi^3}\,.
\end{aligned}$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathscr{F}f_n(\xi) = n\cdot\mathscr{F}\{f(nx)\}(\xi) \overset{26.3\,\text{(a)}}{=} n\cdot\frac{1}{n}\,\mathscr{F}f(\xi/n) = \mathscr{F}f(\xi/n)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Unter Verwendung der in **a)** gefundenen Ergebnisse erhalten wir $\mathscr{F}f_n(0) = \mathscr{F}f(0) = 4/3$ und

$$\mathscr{F}f_n(\xi) = \frac{-4(\xi/n)\cos(\xi/n) + 4\sin(\xi/n)}{(\xi/n)^3} = \frac{-4n^2\xi\cos(\xi/n) + 4n^3\sin(\xi/n)}{\xi^3}$$

für $\xi \neq 0$. Da f (stückweise) stetig und absolut integrierbar ist, ist $\mathscr{F}f$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue (23.6) stetig. Daher ergibt sich für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{F}f_n(\xi) = \lim_{n\to\infty}\mathscr{F}f(\xi/n) = \mathscr{F}f(0) = \frac{4}{3}\,.$$