Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.,
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
28.07.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

14. Übungsblatt

Aufgabe 77 (Übung)

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformation $\mathcal{F}f$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(a) $f(x) = x\mathrm{e}^{-|x|}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$.

(e) $f(x) = \frac{x}{x^4+2x^2+1}$.

Lösungsvorschlag:

(a) f ist absolut integrierbar wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |x|\mathrm{e}^{-|x|} \,\mathrm{d}x = 2 \lim_{R\to\infty} \int_0^R x\mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 2.$$

Deshalb ist nach **Satz 24.7(d)** $\mathcal{F}g$ mit $g(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ differenzierbar und

$$(\mathcal{F}g)'(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}f)(\xi) = -\mathrm{i}\mathcal{F}f(\xi).$$

In der Vorlesung wurde $\mathcal{F}g$ bereits berechnet mit

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Deshalb folgt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{i}(\mathcal{F}g)'(\xi) = -\frac{4\xi\mathrm{i}}{(1+\xi^2)^2}.$$

(b) Da f nur auf der kompakten Menge $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nicht Null ist und dort stetig, ist es absolut integrierbar. Es gilt

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

und deshalb für $\xi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\xi)x}\right) \,\mathrm{d}x.$$

Für $\xi \neq \pm 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(\xi) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)x} - \frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1-\xi)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\xi)\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{i}(1+\xi)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+\xi)\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}}{1-\xi^2} = \frac{2\cos(\xi\frac{\pi}{2})}{1-\xi^2}.
\end{aligned}$$

Im Fall $\xi = 1$ ist

$$\mathcal{F}f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

und für $\xi = -1$ gilt

$$\mathcal{F}f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} + 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dabei haben wir $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi} = -1$ benutzt.

(c) Bezeichnen wir die Funktion aus Teil **(b)** mit g, so gilt

$$f(x) = g(x - \frac{\pi}{2})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach **Satz 24.7(b)** gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}g(\xi) = \begin{cases} \frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\xi}}{1-\xi^2} & ,\xi \neq \pm 1, \\ -\mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = 1, \\ \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & ,\xi = -1. \end{cases}$$

(d) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)^2+1} = g(x+2)$$

mit $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Wir berechnen zunächst $\mathcal{F}g$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ gilt, dass

$$\mathcal{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also $\mathcal{F}g = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)$. Bekanntermaßen ist h absolut integrierbar, genauso wie $\mathcal{F}h$ wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}h(\xi)|\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = 4\lim_{R\to\infty}[\arctan(\xi)]_{\xi=0}^R = 2\pi.$$

Deshalb erfüllt h die Voraussetzungen für die Inversionsformel und es gilt

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}(\mathcal{F}h)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(-x).$$

Somit gilt

$$\mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}h)(\xi) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi h(-\xi) = \pi \mathrm{e}^{-|\xi|}$$

und schließlich mit **Satz 24.7(b)**

$$\mathcal{F}f(\xi) = \mathrm{e}^{2\xi\mathrm{i}}\mathcal{F}g(\xi) = \pi\mathrm{e}^{2\xi\mathrm{i}-|\xi|}.$$

(e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}g'(x)$$

mit g wie in **(d)**. Da g und g' absolut integrierbar sind (der Nenner ist nullstellenfrei und das dortige Polynom hat einen um 2 bzw. 3 höheren Grad als dasjenige im Zähler), folgt aus **Satz 24.7(ae)**

$$\mathcal{F}f(\xi) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}g'(\xi) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\mathcal{F}g(\xi) = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\xi\pi\mathrm{e}^{-|\xi|}$$

Aufgabe 78 (Übung)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

Wir bemerken zunächst, dass

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2,$$

und für $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}}{-\mathrm{i}\xi} = 2\frac{\sin\xi}{\xi}.$$

Da nun die Funktion f absolut integrierbar ist und weiter

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 < \infty$$

gilt, können wir den Satz von Plancherel anwenden und erhalten

$$2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(2\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi.$$

Es folgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \pi,$$

und da der Integrand eine gerade Funktion ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\pi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&= \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin(-\xi)}{(-\xi)}\right)^2 \mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Also ist das gesuchte Integral gegeben durch

$$\int_{0}^{\infty} \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 79 (Übung)

Lösen Sie mithilfe der Fouriertransformation die freie Schrödingergleichung in einer Dimension,

$$\mathrm{i}\partial_t \psi(t,x) = -\frac{1}{2}\Delta\psi(t,x) = -\frac{1}{2}\partial_x^2\psi(t,x),$$

mit Anfangsdatum $\psi(0,x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Lösungsvorschlag:
Seien $\psi(t,\cdot)$, $\partial_t\psi(t\cdot)$, sowie $\partial_x\psi(t,\cdot)$ und $\partial_x^2\psi(t,\cdot)$ für jedes $t > 0$ absolut integrierbar. Wir verwenden die Fouriertransformation bezüglich der x-Variablen

$$\widehat{\psi}(t,\xi) := (\mathcal{F}_x\psi)(t,x) := \int_{\mathbb{R}} \psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

um die partielle Differentialgleichung für ψ in eine einfache gewöhnliche Differentialgleichung zu transformieren. Es gilt

$$(\mathcal{F}_x\partial_t\psi)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t\psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \partial_t\int_{\mathbb{R}} \psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \partial_t\widehat{\psi}(t,x),$$

sowie

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_x\partial_x^2\psi)(t,\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2\psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = (\mathrm{i}\xi)\int_{\mathbb{R}} \partial_x\psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= (\mathrm{i}\xi)^2\int_{\mathbb{R}} \psi(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\xi^2\widehat{\psi}(t,x).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass aufgrund der absoluten Integrierbarkeit von $\partial_x\psi(t,\cdot)$ und $\partial_x^2\psi(t,\cdot)$ für alle $t > 0$ die Randterme beim partiellen Integrieren verschwinden.
Die transformierte Gleichung ist dann

$$\mathrm{i}\partial_t\widehat{\psi}(t,x) = \frac{\xi^2}{2}\widehat{\psi}(t,\xi).$$

Diese Differentialgleichung können wir direkt lösen, und erhalten

$$\widehat{\psi}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{\xi^2}{2}}\widehat{\psi}(0,\xi) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}(1+\mathrm{i}t)}.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Fouriertransformierte der Gauß-Funktion $\psi(0,\xi)$ gegeben ist durch $\widehat{\psi}(0,\xi) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$.
Man beachte, dass die Funktion $\widehat{\psi}(t,x)$ absolut integrierbar ist. Damit können wir mit der Fourierinversionsformel $\psi(t,x)$ bestimmen.

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(t,\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}t)\frac{\xi^2}{2}+\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Durch quadratisch Ergänzen erhalten wir

$$-(1+\mathrm{i}t)\,\frac{\xi^2}{2} + \mathrm{i}\xi x = -\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\left(\xi - \frac{\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}t}\right)^2 - \frac{x^2}{2(1+\mathrm{i}t)},$$

und damit mit Aufgabe 71 (man beachte, dass $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}t) = 1 > 0$ für alle $t \geq 0$!),

$$\begin{aligned}\psi(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1+\mathrm{i}t)}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1+\mathrm{i}t}{2}\left(\xi-\frac{\mathrm{i}x}{1+\mathrm{i}t}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{1+\mathrm{i}t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1+\mathrm{i}t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(1+\mathrm{i}t)}}.\end{aligned}$$