

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Übungs- und Scheinklausur

Aufgabe 1 [6+2+2=10 Punkte]

Betrachten Sie die Familie von Matrizen

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A_α .
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α ähnlich einer Diagonalmatrix?
- Untersuchen Sie die Matrizen A_α auf Definitheit in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG

- (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda(2\alpha + 1)) = (3 - \lambda)\lambda(\lambda - 2\alpha - 1).$$

Die Eigenwerte von A sind also $3, 0, 1 + 2\alpha$. Zuerst berechnen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 3$. Das zu lösende LGS ist $(A - 3I_3)u = 0$. Es ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha - 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir $u_3 = 0$, dann aus der zweiten $u_2 = 0$ und wir können u_1 beliebig wählen. Somit ist $E_3(A) = \text{span}(1, 0, 0)^T$.

Analog bestimmen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 0$. Das zu lösende LGS ist $Au = 0$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des -1 Ergänzungstricks lesen wir ab $E_0(A) = \text{span}(-\frac{2}{3}, -\alpha, 1)^T$.

Für die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + 2\alpha$ lösen wir das LGS $(A - (1 + 2\alpha)I_3)u = 0$. Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 - 2\alpha & 0 & 2 \\ 0 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 - 2\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wieder erhalten wir mithilfe des -1 Ergänzungstricks $E_{1+2\alpha}(A) = \text{span}(1, \frac{\alpha-1}{2}, \alpha - 1)^T$.

- (b) Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Ist $\alpha = 1$ oder $\alpha = -\frac{1}{2}$, so ist im ersten Fall 3 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Da jedoch weiterhin $E_3(A) = \text{span}(1, 0, 0)^T$ ist, die Eigenräume von $\lambda = 3$ und $\lambda = 1 + 2\alpha$ also zusammen fallen, ist die geometrische Vielfachheit nur 1. Im zweiten Fall hat aus dem selben Grund der Eigenwert 0 algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1.

Somit ist A genau für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ diagonalisierbar.

- (c) Da $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist, ist A höchstens semi-definit. Für $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ ist A positiv semi-definit. Für $\alpha < -\frac{1}{2}$ ist A indefinit.

Aufgabe 2 [5+5=10 Punkte]

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.
(ii) Zeigen Sie, dass f überall partiell differenzierbar, im Nullpunkt aber nicht differenzierbar ist.
- (b) Gegeben sei eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, welche im Ursprung einen kritischen Punkt mit der Hessematrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Weiter gelte $g(0, 0) = 2$.

- (i) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung T_2 bis zur zweiten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?
(ii) Es bezeichne $R = g - T_2$ das Restglied in der Taylorentwicklung von g bis zur zweiten Ordnung um $0 \in \mathbb{R}^2$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{|R(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}^k} \rightarrow 0$$

für $\|(x, y)\| \rightarrow 0$?

LÖSUNGSVORSCHLAG

- (a) (i) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wir wählen die spezielle Folge $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3}) \rightarrow (0, 0), k \rightarrow \infty$. Einsetzen ergibt

$$f(x_k, y_k) = \frac{\frac{1}{k^6}}{2 \frac{1}{k^6}} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0.$$

Damit ist f unstetig in $(0, 0)$.

- (ii) Die Funktion ist für $(x, y) \neq (0, 0)$ offensichtlich partiell differenzierbar. Zu untersuchen ist also der Ursprung. Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Wäre die Funktion im Ursprung differenzierbar, so wäre sie dort auch stetig. Da dies nicht der Fall ist, kann f auch nicht differenzierbar sein in $(0, 0)$.

- (b) (i) Da die Funktion einen kritischen Punkt in $(0, 0)$ besitzt, muss $\nabla g(0, 0) = (0, 0)^T$ gelten. Damit erhalten wir als Taylorpolynom zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= g(0, 0) + \nabla g(0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy). \end{aligned}$$

(ii) Nach dem Satz von Taylor gilt für das Restglied $R = g - T_2 = \mathcal{O}(\|(x, y)\|^3)$, und damit

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow 0} \frac{|R(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}^k} = 0$$

für alle $k < 3$, d.h. $k = 1, 2$. Für $k \geq 3$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich.

Aufgabe 3 [5+5=10 Punkte]

(a) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t, x, y) = \log x + y^2 t - 4, \quad t, x, y \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(t, x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1, 1, -2)$ lokal nach y aufgelöst werden kann.

Die erhaltene Funktion werde mit $(t, x) \mapsto \tilde{y}(t, x)$ bezeichnet. Berechnen Sie $\nabla \tilde{y}(1, 1)$.

(b) Wenden Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren an, um die Kandidaten für lokale Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 = 1\}$ zu finden.

LÖSUNGSVORSCHLAG

(a) Es gilt $f(1, 1, -2) = \log 1 + 4 - 4 = 0$, sowie für alle $x > 0, t, y \in \mathbb{R}$,

$$\nabla f(t, x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ \frac{1}{x} \\ 2yt \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \nabla f(1, 1, -2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\partial_y f(1, 1, -2) = -4 \neq 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren daher Umgebungen U von $(1, 1)$ und V von -2 , sowie eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{y} : U \rightarrow V$ mit $f(t, x, \tilde{y}(t, x)) = 0$, d.h. \tilde{y} ist lokal um $(1, 1, -2)$ eine eindeutige Auflösung der Gleichung $f(t, x, y) = 0$ nach y .

Ferner gilt

$$\nabla \tilde{y}(1, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial_t f(1,1,2)}{\partial_y f(1,1,2)} \\ -\frac{\partial_x f(1,1,2)}{\partial_y f(1,1,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Nebenbedingung kann geschrieben werden als $g(x, y) = 0$ mit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = x + y^2 - 1.$$

Es gilt $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Daher hat $g'(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vollen Rang, und nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y).$$

Mit $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$2x = \lambda, \quad 2y = 2\lambda y, \quad x + y^2 - 1 = 0.$$

Fall 1: $y = 0$. Dann ist $x = 1, \lambda = 2$.

Fall 2: $y \neq 0$. Dann ist $\lambda = 1$ und damit $x = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ erhält man $y^2 = 1 - x = \frac{1}{2}$, also $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Insgesamt sind die Kandidaten für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ die drei Punkte

$$(1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Aufgabe 4 [3+(4+3)=10 Punkte]

- (a) Sei $g \in \mathcal{C}^2([0, \infty))$ und betrachten Sie die Funktion $f(\vec{x}) := g(\|\vec{x}\|)$ auf \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass

$$\Delta f(\vec{x}) = g''(\|\vec{x}\|) + 2 \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

- (b) Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2} \\ \frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}$$

- (i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang der Kurve γ parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}.$$

- (ii) Berechnen Sie den Fluss von \vec{F} durch die (nach außen orientierte) Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^3 .

LÖSUNGSVORSCHLAG

- (a) Zunächst zeigen wir mithilfe der Kettenregel, dass

$$\nabla f(\vec{x}) = g'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}.$$

In der Tat gilt wegen $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, dass

$$\partial_j \|\vec{x}\| = \partial_j \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{2x_j}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{\|\vec{x}\|}, \quad j = 1, 2, 3,$$

und damit

$$\partial_j f(\vec{x}) = \partial_j g(\|\vec{x}\|) = g'(\|\vec{x}\|) \partial_j \|\vec{x}\| = g'(\|\vec{x}\|) \frac{x_j}{\|\vec{x}\|}.$$

Wegen $\Delta = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2$ müssen wir diesen Ausdruck nochmal nach x_j ableiten,

$$\begin{aligned} \partial_j^2 f(\vec{x}) &= \partial_j \left(g'(\|\vec{x}\|) \frac{x_j}{\|\vec{x}\|} \right) = (\partial_j g'(\|\vec{x}\|)) \frac{x_j}{\|\vec{x}\|} + g'(\|\vec{x}\|) \partial_j \frac{x_j}{\|\vec{x}\|} \\ &= g''(\|\vec{x}\|) \frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'(\|\vec{x}\|) \frac{\|\vec{x}\|^2 - x_j^2}{\|\vec{x}\|^3}, \end{aligned}$$

und über alle $j = 1, 2, 3$ summieren

$$\begin{aligned} \Delta f(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 f(\vec{x}) = g''(\|\vec{x}\|) \sum_{j=1}^3 \frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'(\|\vec{x}\|) \sum_{j=1}^3 \frac{\|\vec{x}\|^2 - x_j^2}{\|\vec{x}\|^3} \\ &= g''(\|\vec{x}\|) \frac{\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} + g'(\|\vec{x}\|) \frac{3\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^3} \\ &= g''(\|\vec{x}\|) + 2 \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}. \end{aligned}$$

Alternativ: Wegen $\Delta f(\vec{x}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{x})$ müssen wir noch die Divergenz des erhaltenen Vektorfeldes bestimmen. Diese lässt sich mit der Kettenregel

$$\nabla \cdot (h\vec{v}) = \nabla h \cdot \vec{v} + h \nabla \cdot \vec{v}$$

für Skalarfelder $h \in \mathcal{C}^1$ und Vektorfelder $\vec{v} \in \mathcal{C}^1$ bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(g'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) &= \nabla \left(\frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|} \right) \cdot \vec{x} + \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|} \nabla \cdot \vec{x} \\ &= \frac{\|\vec{x}\| g''(\|\vec{x}\|) - g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x} \cdot \vec{x} + 3 \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|} \\ &= g''(\|\vec{x}\|) + 2 \frac{g'(\|\vec{x}\|)}{\|\vec{x}\|}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\nabla \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^3 \partial_j x_j = 3$, $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$, und obige Regel für den Gradienten von radialen Funktionen, angewendet auf $r \mapsto \frac{g'(r)}{r}$ mit

$$\frac{d}{dr} \frac{g'(r)}{r} = \frac{r g''(r) - g'(r)}{r^2}$$

nach der Quotientenregel.

- (b) (i) Beim Vektorfeld \vec{F} handelt es sich um ein Gradientenfeld. Das Potential kann man dabei direkt ablesen, denn

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}}{\frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{2\|\vec{x}\|}{1 + \|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = g'(\|\vec{x}\|) \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},$$

wobei $\vec{x} = (x, y, z)$ und $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(r) = \int \frac{2r}{1+r^2} dr = \log(1+r^2),$$

also

$$\vec{F}(x, y, z) = \nabla \log(1 + \|\vec{x}\|^2).$$

Definiere $\Phi(\vec{x}) = \log(1 + \|\vec{x}\|^2) = g(\|\vec{x}\|)$. Für das Wegintegral gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \nabla \Phi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(\gamma(t)) dt = \Phi(\gamma(2\pi)) - \Phi(\gamma(0)) \\ &= \Phi(2\pi, 0, 0) - \Phi(0) = \log(1 + 4\pi^2). \end{aligned}$$

- (ii) Den Fluss von \vec{F} durch die Oberfläche der Einheitskugel können wir direkt berechnen: das Normalenfeld an die Einheitssphäre ist gegeben durch $\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ und damit

$$\int_{\mathbb{S}^2} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) dS(\vec{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \frac{2\|\vec{x}\|}{1 + \|\vec{x}\|^2} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} dS(\vec{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} 1 dS(\vec{x}) = 4\pi.$$